METEORE LUMINOSE

L'ARCOBALENO

IL MIRAGGIO

MEMORIE DI FISICA MATEMATICA

DEL

Dott. COSIMO BERTACCHI

CON UN PROEMIO

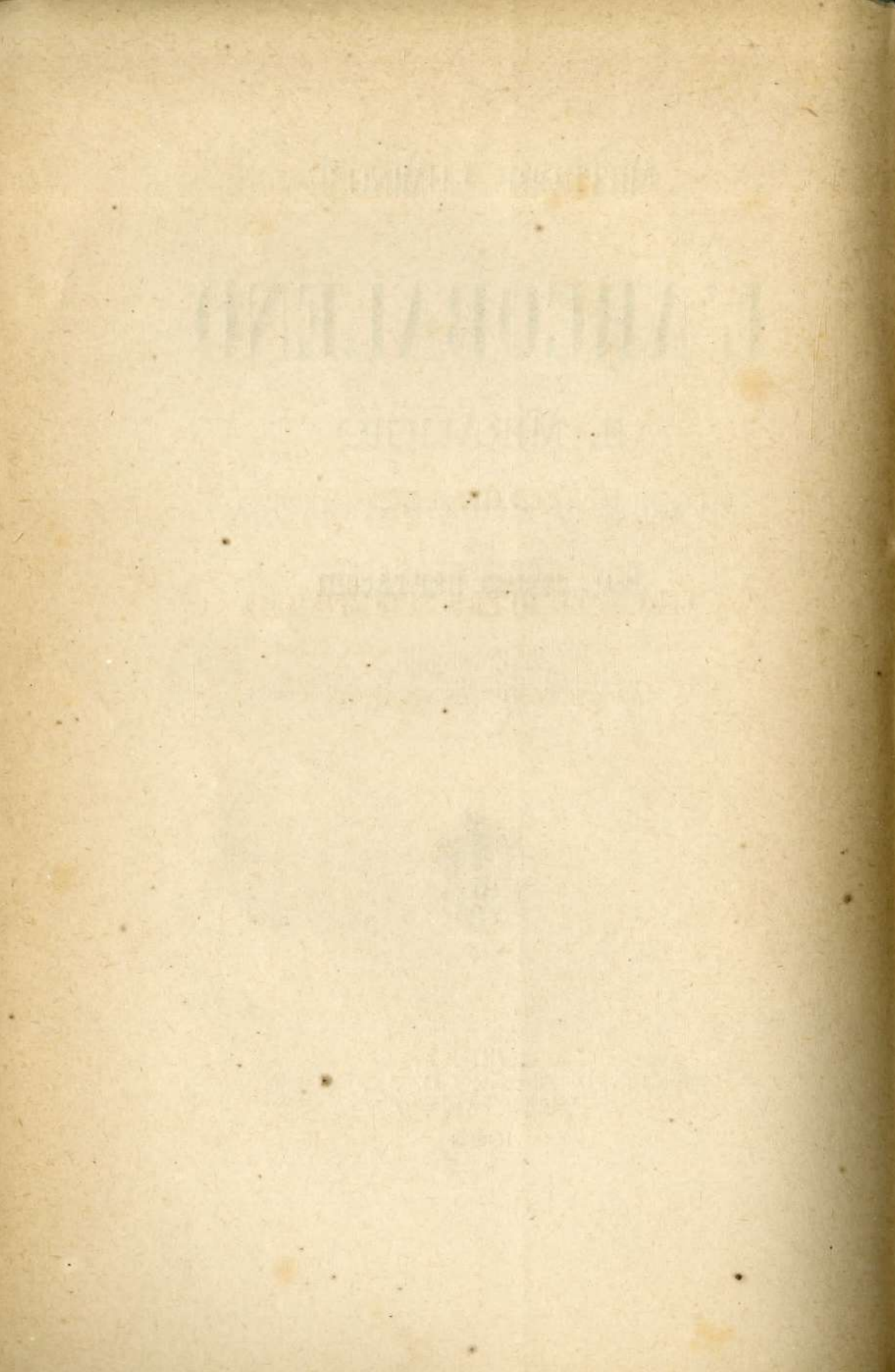
SULLA VITA E LE OPERE SCIENTIFICHE DI M. A. DE-DOMINIS

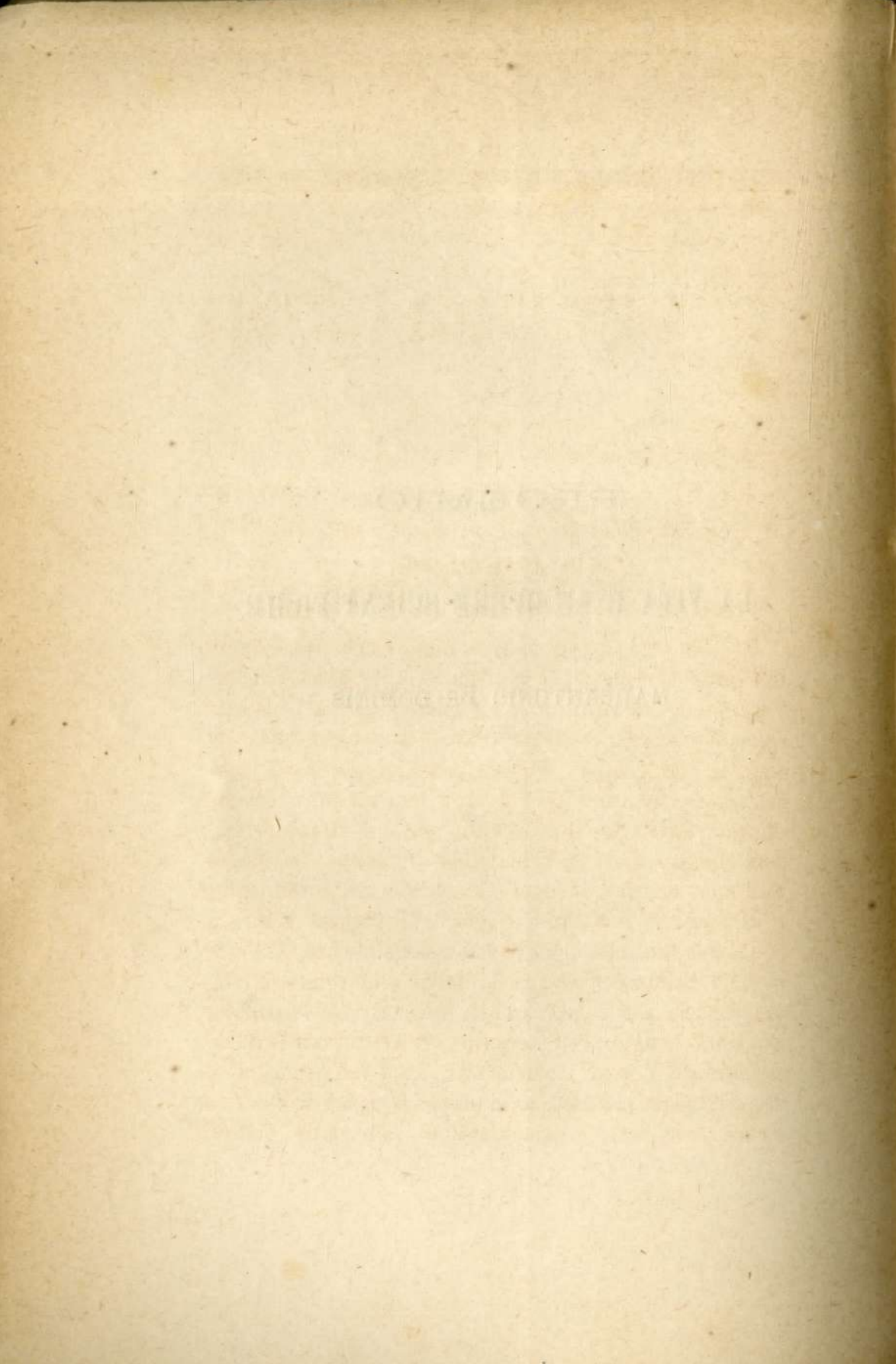
TORINO
TIPOGRAFIA EDITRICE G. CANDELETTI
Via della Zecca, n. 11

1883

PROEMIO

LA VITA E LE OPERE SCIENTIFICHE

DI

MARCANTONIO DE DOMINIS

I.

Considerazioni generali sui tempi e sulla vita di M. A. De Dominis.

Il giorno 24 luglio di quest'anno 1883, trovandomi in Roma, io visitava per la prima volta la Mole Adriana. Cercava di ricostruirne coll'immaginazione l'antica splendida forma, le statue rotolate o lanciate negli assedi, le sale, i dipinti, la tomba dell'imperatore situata nel centro; mentre invece da quei lugubri antri stillanti lacrime ascose mi si affacciava, piena di strani terrori, una lunga storia di schiavitù e di delitti. Da quelle muraglie enormi, da quelle tenebre dense di immagini e di pensieri, il Medio Evo guarda in silenzio. È questa la vecchia Bastiglia della libertà e della scienza, dell'arte e della bellezza. E non vi ha italiano, nè straniero che, aggirandosi per i suoi anditi maestosi, non evochi ad un tratto le figure di Crescenzio, di Arnaldo da Brescia, di Stefano Porcari; e non oda, fra i tetri macigni e le porte basse e massiccie, l'ultimo lamento di Beatrice Cenci, o la toscana bestemmia di Benvenuto Cellini.

Nessuno tuttavia cerca e nessuno saprebbe indicare (1) la prigione ove morì Marco Antonio De Dominis, Arcivescovo di Spalatro, autore della teoria geometrica del canocchiale e dell'iride, dimenticato da noi, rivendicato ai tardi onori della fama e della storia da uno straniero, dal massimo Isacco Newton.

Di lui come vescovo, e della sua vita avventurosissima, si hanno notizie importanti sparse qua e là in opere autorevoli, particolarmente nell'*Illiria Sacra* del Farlati (2); ma si può sempre affermare che una bio-

(1) Debbo ad ogni modo qui ricordare il nome di un curioso e simpatico vecchio, il veterano Ciro Ciri che mi fu guida nell'interno di Castel Sant'Angelo, suo studio e dimora da molti anni.

(2) *Illirici Sacri*, t. III, Ecclesia Spalatensis, *D. Farlato*, presbytero Societatis Jesu — Venetis, Coleti, 1766, pagg. 481-500.

Molti brani di lettere e notizie riguardanti M. A. De Dominis e l'amico suo Paolo Sarpi (dal 1607 al 1617) sono riportate dal cav. Cicogna nel t. 5, pag. 608 delle *Iscrizioni Veneziane*.

Altre fonti importanti per più estesi studi, oltre quelle che nominerò in appresso, sono le seguenti:

Journal des Savants; 1677, 1701, 1702, 1719, 1726.

Montucla, *Histoire des Matématiques*, T. I, p. 701, 2, 3, 5.

Id. id., II, p. 230 e 263. — Paris, a. VII, X.

Montferrier, *Dizionario delle scienze matematiche*, T. 8. — Firenze, 1838-49.

Backer, *Biliothèque des écrivains de la Compagnie de Jesus*. — Liège, 1853-61. — Ser. V, p. 177.

Riccardi, *Biblioteca matematica italiana*. — Modena, 1870-80, coll. 417, 488.

Begerlink, *Profectionis M. A. De Dominis consilium examinatum*. — Antwerpioe, 1677, in-8.°

L'*Iride*, opera di fisica matematica, ecc. — Bologna, 1678, in-4.°

Mi fo premura, a questo riguardo, di ringraziare pubblicamente il cav. Bertolotti per alcune pregevoli notizie da lui comunicatemi sul De Dominis, notizie, che io ho potuto riscontrare sui documenti durante il mio ultimo soggiorno in Roma.

Debbo ringraziare parimenti il sig. Vincenzo Armando, della Biblioteca del Duca di Genova in Torino, perchè con molta sollecitudine ed estese cognizioni bibliografiche, mi è stato di aiuto non lieve in queste ricerche.

grafia compiuta di questo filosofo dalmatino, amico di Gregorio XV e di Fra Paolo Sarpi, vissuto nel secolo di Cardano e di Galileo, della magia e della nascente filosofia sperimentale, del Cavalier Marino e delle scienze esatte, della reazione cattolica e della progrediente Riforma; sbattuto dall'una all'altra fra onori di papi e di principi, e subite e implacabili persecuzioni; uno studio particolareggiato di questa interessante figura italiana di teologo e di scienziato del metodo moderno, il cui profilo è rimasto perduto nel terribile cozzo del vecchio col nuovo, qui atteggiato a martire del pensiero e zelatore ardito di libertà, altrove invece ad ambizioso volgare ed apostata in mala fede; un lavoro insomma che facesse rivivere dinanzi a noi in un esame critico, scrupoloso e inspirato, la fisionomia di quest'uomo singolare, ponendola sotto la sua vera luce — non è ancora stato fatto in Italia, nè fuori.

Nè io certamente intendo di mettere innanzi a' miei lettori una tela così larga e complessa, tanto più che l'indole de' miei studî, alieni da ogni questione dogmatica e teologica, non me lo concede che in quella sola parte avente un carattere esclusivamente scientifico. Procurerò tuttavia di tessere rapidamente la vita di Marc'Antonio De Dominis colla maggior copia di fatti ed esattezza possibile, esponendo talvolta cose nuove e mal conosciute, rischiarando parecchi punti o dubbî od oscuri, astenendomi sopratutto da qualsiasi apprezzamento di ordine metafisico, e lasciando infine liberi i miei lettori di giudicare a loro senno (sempre però coi criterî dei tempi) fra lui e il tribunale dell'inquisizione che lo processò e condannò.

II.

Primo periodo teologico della sua vita.

Nacque il De Dominis nel 1566 ad Arbe, piccola isola della Dalmazia, da quella famiglia Visconti che tre secoli innanzi avea dato alla sedia pontificia Gregorio X. Il suo casato pare incominci ad affermarsi col nipote di quel pontefice, cioè sin dal 1300; e credo risuoni ancora oggidì in alcune parti dell'Illiria (1). Anche il Farlati osserva che questa famiglia è antica, illustre nella magistratura, nelle armi e nel sacerdozio; derivata secondo alcuni dalla nobilissima stirpe dei Frangipani, e origine non dubbia di parecchi vescovi: Simone Tragariense, il quale partito per la Spagna, adempì un'ambasciata onorifica di Sigismondo imperatore presso i Padri del Concilio di Costanza e fu ammesso insieme ai vescovi più insigni della nazione germanica ai concilii pontificali; Giovanni Seniense ed Antonio, zio di Marc'Antonio, e il figlio di suo fratello anch'esso vescovo di Segni.

Marc'Antonio De-Dominis, dopo aver trascorsa la fanciullezza nella casa paterna, fu mandato a Loreto nel collegio Illirico, diretto dai Gesuiti. Si recò poscia a Padova per compiere i suoi studi in quella celebre università. I suoi progressi nelle scienze, nelle lettere e nelle arti furono così rapidi che destarono in tutti la più singolare meraviglia. Aveva rivelato un ingegno forte e pieghevole, un'eloquenza piena di impeto e di

(1) Due anni or sono ho trovato a Padova un conte De Domini, direttore della Scuola Navale della città di Fiume.

tenacia. Perciò, dice il Farlati, gesuita, facilmente si aprì l'adito alla nostra società. Secondo gli autori della *Biografia Universale antica e moderna,* i gesuiti nulla avrebbero trascurato per determinarlo ad entrarvi, credendosi di aver trovato in lui chi poteva procacciare gran lustro all'ordine intero (1).

Ognuno sa come e quanto fossero potenti allora i Gesuiti. Per essi i papi si argomentavano di estirpare l'eresia e abbattere la Riforma, che poco tempo innanzi aveva sottratto alla Chiesa mezz'Europa. Essi colla rozza eloquenza di uno zelo eccessivo dapprima, e poscia colle attrattive di una erudizione elegantemente accomodata allo spirito del secolo, si erano fatti padroni degli ingegni e delle coscienze. La loro scienza era cortese e brillante, le loro dottrine erano tolleranti, liberali e comprensive. Essi assorbivano la miglior parte degli elementi ancor vivi di quella società italiana omai corrotta e decrepita, indifferente ad ogni senso di pietà e di onore, già lungamente devastata da un naturalismo petulante su cui era passato stridendo lo scettico riso della rinascenza.

M. A. De Dominis durante il suo noviziato si applicò segnatamente allo studio delle matematiche, nelle quali si fece in breve sì esperto che venne proposto ad insegnarle nel Collegio Romano, ove le sue lezioni traevano costantemente un uditorio colto e numeroso. Non si sa precisamente la data del suo passaggio alla Compagnia di Gesù. Il Farlati osserva che negli archivi dell'Ordine, le cui librerie diligentemente cercò,

(1) *Biographie universelle ancienne et moderne,* Paris 1874 — (Opera compilata in Francia da una società di dotti e vôlta in italiano, edizione di Venezia 1824).

nè il suo nome, nè l'anno in cui entrò nella Società, o l'abbandonò, nè ciò ch'egli fece, si potè rinvenire. Aggiunge tuttavia che gli venne da Roma trasmesso uno scritto, ove si dice che il De Dominis visse nell'ordine dei gesuiti venti e più anni, e si danno molte notizie sul suo insegnamento. Venti anni mi paiono troppi: poichè gli è certo che, non potendosi acconciare ai vincoli dell'ordine, affrettò la sua secolarizzazione verso il 1596. Il suo spirito inquieto e focoso male si adattava alle consuetudini dei Gesuiti ove la sommissione cieca e la disciplina rigorosa e perfetta doveano formare e formavano veramente il loro carattere più spiccato. Parve ad essi ch'egli volesse mettere a soqquadro la Compagnia, rimutandola da cima a fondo. In breve avvenne, come si esprime il Farlati, che nè la Società potè più sopportare quest'uomo, nè egli la disciplina della Società. Solo in una cosa adunque furono d'accordo: nel desiderio vivissimo di separarsi.

Dopo accettate le dimissioni, dicesi che il De Dominis sia stato inscritto fra i prelati della Curia Romana. Ma accadde per avventura, proprio nello stesso anno 1596, che suo zio Antonio, vescovo di Segni, mentre con un esercito da Leucorichio, prefetto della Croazia, raccolto a danno dei Turchi, accorreva in aiuto dei Clissani assediati, moriva gloriosamente nel furore della mischia. Questo fatto svegliò nell'animo del nipote il desiderio di acquistare il vescovado rimasto vacante. Si recò egli dall'imperatore Rodolfo II, da cui dipendeva l'elezione di Segni, e seppe così bene cattivarsene l'ammirazione e l'affetto che finalmente ottenne quanto chiedeva. Questa nomina venne approvata nel 1600 da Clemente VIII, non senza molti

contrasti da parte dei Gesuiti, che attribuivano a male arti cortigiane la decisione dell'imperatore.

Ciò non ostante due anni dopo, vale a dire nel novembre del 1602, Marco Antonio De Dominis veniva traslato dalla Sedia di Segni a quella arcivescovile di Spalatro (vacante per la morte di Domenico Foconio) e fatto contemporaneamente Primate di Dalmazia e di Croazia. Era suo formidabile competitore Marcio Andreuccio, decano utinense (col quale ebbe poi a sostenere una lunga controversia) e potè vincere allora la difficile prova col valido aiuto del Cardinale Cinzio, già suo allievo al Collegio Romano, ora suo potente e generoso amico.

Lo storico gesuita, già più volte menzionato, ci offre numerosi particolari su questo nuovo importantissimo periodo della vita di Marco Antonio De Dominis. Ci narra il bell'esordio del suo pontificato, le opere lodevoli compiute dapprima in questo suo arcivescovado di Spalatro, le costituzioni ed i privilegi dati al Capitolo, e il modo col quale egli sostenne la giurisdizione della propria chiesa contro l'arcivescovo di Trau.

Ma il suo zelo parve tosto eccessivo. I suoi arditi disegni di riforma si spingevano fino al governo supremo della Chiesa e alla base fondamentale della disciplina ecclesiastica. Egli non intendeva soltanto a dare al Capitolo una nuova costituzione, che fu riveduta, giudicata e corretta dalla Sacra Congregazione (1607); ma voleva altresì ritornare ai vecchi usi democratici della Chiesa primitiva col ristabilire l'intervento del suffragio popolare nel conferimento o nella conferma delle varie dignità ecclesiatiche (1). Questo regime, avendo un'in-

(1) Farlati, *op. cit.*, T. vi.

dole schiettamente repubblicana, voleva egli attuare nella sua diocesi, risoluto com'era di subirne le conseguenze contro tutto e contro tutti. Nè egli avrebbe mai preveduto che, due secoli dopo, lo stesso principio dovea essere propugnato, salvo alcune modificazioni, da un grande atleta della filosofia cattolica, Antonio Rosmini, (1) il quale, dal canto suo, ignorava che siffatta usanza erasi perpetuata nel grembo stesso della Chiesa, in un oscuro angolo privilegiato del mondo cristiano, sul Libano, presso la nazione Maronita, come per primo ci ha dimostrato il compianto Regaldi in una sua preziosa memoria originale (2).

III.

Periodo scientifico.

Fu senza dubbio nella dimora relativamente tranquilla di Spalatro, e nei primi anni del suo pontificato, che Marco Antonio De Dominis si diede con nuovo ardore al compimento di quei lavori scientifici che, intrapresi venti anni innanzi, non avrebbe mai dovuto abbandonare.

Il *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride tractatus,* uscì difatti alla luce in Venezia nel 1611 (3).

È questo un libro raro e prezioso di cui venne fatta soltanto una 2ª edizione nel 1623 (4), e che attende an-

(1) Rosmini, *Le cinque piaghe della Chiesa.*

(2) G. Regaldi. — *Il Libano* (V. Canti e prose, Vol. II, pag 251. Edizione Vaccarino, Torino, 1861).

(3) Per Joaunem Bortolum *in lucem editus Venetii, Thomam Baglionum 1611, 4°.*

(4) Seconda Edizione, Parisiis, 1623, 4°.

cora una edizione italiana redatta con vera intelligenza di critica storica e scientifica, la quale collochi il De Dominis a quell'alto posto che gli compete nello svolgimento del pensiero moderno.

Ho già nominato Isacco Newton. Fu egli il primo che trasse quest'opera dall'obblio in cui era caduta; fu il primo e forse il solo finora veramente atto a giudicarla.

Ecco in qual modo si esprime a proposito della teoria dell'arcobaleno il sommo fisico inglese:

« . . . . . ciò fu capito da qualcuno degli antichi: e di recente il famoso (1) Antonio De Dominis, Arcivescovo di Spalatro, in questo libro *De Radiis visus et lucis*, pubblicato dal suo amico Bartoli in Venezia, nell'anno 1611, e scritto circa venti anni prima, insegna come l'arco interiore è fatto in rotonde goccie di pioggia da due rifrazioni della luce del sole ed una riflessione frammezzo a queste, mentre l'arco esteriore è fatto da due rifrazioni estreme e due riflessioni intermedie in ogni goccia d'acqua. L'autore prova queste spiegazioni per mezzo di esperimenti fatti con una fiala piena d'acqua e con globi di vetro riempiti pure di acqua, disposti al sole in modo da produrre i colori dei due archi che appaiono in natura. La stessa spiegazione ha seguitato Cartesio nei suoi scritti sulle meteore, accomodando quella dell'arco esteriore (2). »

Si volle pretendere da alcuni che Newton abbia inteso di innalzare De Dominis per abbassare il filosofo

(1) Era celebre a quei tempi per un libro di cui faremo cenno più sotto.

(2) NEWTON'S *Optics*. London, 1704 in 4°, pag. 126-127 e 132, lib. I, part. 2ª prop. 9.

francese a cui viene generalmente attribuita la spiegazione del fenomeno. Ma, soggiunge opportunamente G. Libri, è difficile ammettere un tal pensiero nell'Autore dei *Principii*, ed è più probabile che Newton fosse veramente soddisfatto delle idee ingegnose dell'Arcivescovo di Spalatro (1).

Certamente molti pregiudizi ed un male inteso, ostinato orgoglio nazionale degli scrittori francesi, avvalorato pur sempre dalla complice ignavia dei nostri, ha potuto lungamente avviluppare in un profondo e vituperoso oblio il merito scientifico di questo illustre Italiano.

La *Biographie Universelle*, già citata, ripete la solita supposizione a carico di Newton, e trova che Boscovich e Tiraboschi (di cui, osserva, la testimonianza non può essere sospetta) sono di avviso che De Dominis ha potuto mettere Cartesio sulla via della scoperta, ma che questi soltanto deve esserne riguardato come il vero autore. Essi aggiungono (sempre secondo la *Biographie Universelle*) che i numerosi errori sparsi nel libro di De Dominis mostrano non esser egli molto addentro nello studio delle scienze fisiche e matematiche.

Osserverò innanzi tutto che il Tiraboschi non può essere notato come una testimonianza in proposito, mentre basta aprire l'opera sua per vedere ch'egli si dichiara giudice non competente in fatto di matematica, e riferisce senz'altro l'opinione del Boscovich, ove questo scrittore dice che Cartesio arrivò più in là di De Dominis, e Newton più in là di Cartesio (2).

(1) G. Libri, *Hist. des Mathém. en Italie, t. IV. p. 145.*
(2) Tiraboschi, Milano, xiv, 335.

Dirò in secondo luogo che è ben strano questo modo di ragionare secondo il quale, dopo aver dimostrato che la teoria dell'Arcobaleno non è tutta dovuta al De Dominis, si vuol concludere invece che è tutta dovuta a Des Cartes.

Ma non bastano queste affermazioni, sempre gratuite quando non sono dimostrate coi fatti in seguito ad una dichiarazione esplicita ed esatta dei veri termini della questione: si è ancora preteso di trovare, come ho riferito più sopra, *numerosi errori sparsi nel libro* dell'arcivescovo di Spalatro, *i quali mostrano non esser egli molto addentro nello studio delle scienze fisiche e matematiche.*

Senza dire che ciò è in perfetta contraddizione col fatto che il De Dominis a Roma, a Loreto, a Brescia e persino a Padova, in quella famosa università illustrata dal genio di Galileo, aveva fatto meravigliare ognuno colla sua dottrina appunto nelle scienze matematiche (1); basta aprire direttamente il libro stesso del filosofo dalmatino per convincersi ch'egli si vale, nè più nè meno, delle cognizioni geometriche del suo tempo, come hanno fatto, certamente con maggior copia di novità matematica, i suoi contemporanei, Galileo, Keplero e lo stesso Cartesio. Persino le scoperte capitali di questi tre grandi uomini, la dinamica, stabilita su nuove basi da Galileo col principio della indipendenza dei movimenti; la meccanica celeste iniziata da Keplero colla dimostrazione delle tre leggi che regolano il movimento dei pianeti; la geometria analitica intuita da Leonardo da Vinci e trovata effet-

(1) Farlati, op. cit., § 1.

tivamente da Cartesio, sarebbero rimaste pressochè stazionarie entro i limiti della geometria antica e dell'algebra appena progredita fino a Tartaglia e a Cavalieri, ove Leibnitz e Newton non avessero scoperto, quasi contemporaneamente e per vie diverse, un nuovo modo più generale di considerare ogni questione matematica, e dato alla scienza ciò che A. Comte (1) appella a buon diritto *il più potente istrumento dello spirito umano*; cioè il calcolo differenziale e integrale.

Basta dunque esaminare direttamente il trattato del De Dominis per riconoscere ch'egli della geometria ha fatto, intorno agli ardui argomenti di ottica da lui primo trattati con chiarezza e diffusione, tutto quell'uso ch'era possibile al tempo suo, non senza molta novità di applicazione, avvalorata dall'esperienza.

Ho detto che l'esperienza avvalorava la spiegazione geometrica data dall'arcivescovo di Spalatro al fenomeno dell'arcobaleno. Su questo punto credo opportuno di richiamare l'attenzione dei miei lettori.

Cadeva il secolo XVI e sorgevano le prime albe della filosofia sperimentale. La scienza si andava faticosamente svincolando dai vecchi sistemi mettendosi sulla via che Bacone da Verulamio le additava da lunge, e nella quale, per opera di Galileo e de' suoi seguaci, aveva già fatto importanti scoperte. È facile comprendere quante fossero le difficoltà non soltanto materiali, ma special-

(1) A. Comte, *Cours de phil. positive*, t. I (V. alle lezioni sul calcolo delle " funzioni indirette „ o calcolo trascendente).

Il Comte manifesta lo stesso pensiero esposto in questo luogo allorchè ragiona della " idea madre di Cartesio circa la rappresentazione analitica generale dei fenomeni naturali, idea a cui lo stesso Pascal non diede grande importanza perchè era il *calcolo delle funzioni indirette* che doveva svilupparla „ (V. pag. 225 e segg.).

mente intellettuali e morali, che in mezzo a tanti ingegnosi pregiudizi dottamente accumulati da quasi venti secoli di filosofia scolastica, dovevano assediare d'ogni parte, per effetto di una educazione falsa lungamente ereditata, quei benefici ingegni, e, più di ogni altro, l'ingegno vivo, coltissimo, irrequieto di Marco Antonio De Dominis. Eppure quest'ultimo non solamente ha saputo darci una teoria che nella sua base primitiva e fondamentale, per ciò che riguarda l'arcobaleno, è ancora quella d'oggidì, ma ha voluto altresì darcene l'applicazione ed il controllo sperimentale. Nell'opera sua egli cita costantemente la valida testimonianza dell'osservazione e dell'esperienza, dimostrando i metodi adottati nella riproduzione artificiale dei fenomeni, come appunto ha cura di rilevare lo stesso Newton nel brano citato del libro sull'Ottica. Il De Dominis adunque, come gli altri precursori dei tempi nuovi così potentemente vaticinati da Bacone, non cercava già *l'ingegnoso*, ma il *vero*.

Vediamo ora di chiarire in che consista veramente il merito del nostro Autore nella teoria dell'arcobaleno, e che cosa si intenda in queste pagine allorchè diciamo ch'egli ce ne ha dato *la base primitiva e fondamentale.*

Il primo fondamento della teoria in questione consiste appunto nel riconoscere il fatto, riassunto da Newton, della doppia rifrazione e della riflessione intermedia della luce nella superficie interna di ciascuna sferetta acquea che piove, per l'arco inferiore, e della doppia rifrazione interrotta da una doppia riflessione interna, per l'arco superiore. Cartesio ha bensì rifatta le teoria dell'ex-gesuita italiano e datale nuova consistenza colla nozione dei *raggi efficaci*, ma neppure

a lui si può attribuirne il vero compimento e quel grado ultimo di perfezione che ha potuto conseguire dopo i lavori di Newton, di Young e di Airy.

Così è. Un uomo solo non è mai destinato a compiere ciò che fa. Il filosofo di Arbe ci ha dato il primo disegno della teorica dell'arcobaleno, ma era ben lontano da solo immaginarne il vero compimento. Lo stesso Cartesio non avrebbe mai preveduto la formola generale di Newton e quella generalissima di Airy. Ma che perciò? Vien forse meno all'italiano il merito della iniziativa nei principii largamente e lucidamente stabiliti, e al francese quello di aver saputo riconoscere la via che gli era stata dischiusa, per avanzarvisi con nuove e ingegnose speculazioni?

È vero, è vero. Un uomo solo non è mai destinato a compiere ciò che fa. Bene spesso non gli è neppur conceduto di vederne da lunge i veri confini e di presentirne le conseguenze anche immediate. Colombo ha scoperto l'America: eppure non ne ha toccato che le Antille e una parte del litorale della Venezuela fino allo stretto di Darien, e morì senza conoscere appieno ciò che colla sua costanza e col suo genio aveva dato all'Europa. Volta ha costrutto la pila per sostenere una teoria falsa, e morì senza conoscere la vera, che veniva data alla scienza da un altro italiano, il Fabroni. Ma che perciò? Non è forse Colombo lo scopritore dell'America, e Volta l'inventore della pila?

Identico è il caso di Marco Antonio De Dominis per rispetto alla teoria dell'arcobaleno.

Ma vi ha ancora una difficoltà. Secondo alcuni egli sarebbe stato preceduto da un frate del trecento, secondo altri dallo stesso Keplero che su questo argo-

mento avrebbe scritto verso il 1606 in un carteggio privato, probabilmente ancora inedito e sconosciuto.

Senza dire che il lavoro del fisico italiano è senza dubbio precedente a questa data, quale è infine la scoperta o l'invenzione di cui non si trovi già qualche indizio o qualche elemento nei lavori o nelle idee che la precedettero? E questa è l'origine vera delle interminabili contese che sorgono pur sempre sulla priorità di ogni scoperta. Eppure la gloria di un'invenzione non è già di chi ha saputo darne senz'altro e di passaggio una vaga idea, ma di chi invece ha saputo trattarne con sicurezza i primi particolari di fatto, o, se vi ha d'uopo di osservazione e di esperienza, ha saputo eseguire l'una e l'altra.

Nel nostro caso, poi, mancano persino gli elementi di siffatta discussione, onde nello stato attuale della critica storica la priorità di cui parliamo non può esser contesa in nessun modo all'arcivescovo di Spalatro.... almeno fino al giorno in cui, dopo accurate e serie indagini, non si sia scoperto che in China...

Dunque Marco Antonio De Dominis può e deve esser ritenuto finora come il vero autore della teoria dell'arcobaleno.

IV.

Secondo periodo teologico.

Ho accennato precedentemente al concetto di una radicale riforma ecclesiastica, tentata con molta imprudenza e molta precipitazione da M. A. De Dominis

nella sua diocesi di Spalatro. Ho pure accennato agli ostacoli di vario ordine che si opponevano direttamente all'attuazione di questo suo disegno.

Dice il Farlati che « Marco Antonio *fu invero un grand'uomo,* ornato di esimii doni dalla natura, di sottile e perspicace ingegno, di eccellente dottrina, di singolare eloquenza; ma tutte queste cose (prosegue lo storico gesuita) egli corruppe col vizio, coll'ambizione, coll'arroganza e con un'intollerabile superbia. Molte cose per verità intraprese o ridusse a compimento, degne di lode, ma non per ogni parte; e di queste medesime cose lodevoli alcuna ve n'era che dall'uso comune e dalla presa consuetudine venivano abborrite e sembravano offendere il diritto altrui, dando al loro autore l'aspetto di un uomo cupido di cose nuove, sprezzante delle vecchie » (1).

Lo scrittore predetto nota fra i meriti principali del De Dominis quello di aver creato con insolita magnificenza un vero teatro di musica sacra, erigendo per quest'uso, in parte a proprie spese ed in parte coi danari radunati dal Capitolo e dai primari cittadini « una grandissima cupola che dottamente e venustamente congiunse colla chiesa metropolitana. Questo monumento illustre e perenne del suo nome lasciò Marco Antonio De Dominis alla sua Dalmazia nativa » (2).

Osserva sempre il Farlati che tuttociò egli faceva per scaltrezza e malizia, e che, se una cosa gli sembrasse bella e degna di plauso, ed egli non di rado la faceva: onde si mostrava sovente affabile e benefico. Egli non negava mai l'opera sua, se poteva giovare

(1) Farlati, *op. cit.* loc. cit.
(2) Id., § vii.

ad alcuno: e ciò per avere fautori da opporre a' suoi avversari, che tuttavia per le sue idee e il suo modo di manifestarle, erano moltissimi. Insofferente della viva opposizione che i suoi disegni incontravano negli alti gradi della gerarchia ecclesiastica, più volte avea apertamente dimostrato il suo animo avverso alla Curia Romana. Ed un giorno, avendo dal pulpito, innanzi ad un'affollata moltitudine, detto qualche cosa che dalla dottrina cattolica pareva o era discordante, un canonico sorse dal suo seggio e gridò: tu menti per la gola. Alcuni amici privatamente lo esortarono ad una condotta più cauta e prudente; ma egli non volle cessare dal divulgare coi detti e cogli scritti le sue opinioni, finchè sorsero nel Capitolo e nell'ordine dei nobili coloro che contro la diffusione di siffatte dottrine si rivolsero direttamente all'autorità del pontefice Paolo V. Ciò avendo egli saputo, stabilì di deporre subitamente il pontificato spalatense. A nessuno aprì il suo divisamento, ma, verso la fine dell'anno 1615, con inaspettata e repentina partenza, si recò a Venezia. Già con molta veemenza, secondo la sua natura impressionabile e violenta, aveva egli preso le parti della Repubblica Veneta nella contesa ch'essa dovette sostenere contro Paolo V; e la sua operosa amicizia per Fra Paolo Sarpi non era certo il titolo più opportuno per procurargli la benevolenza di Roma.

Giunto a Venezia, egli scrisse una lunga lettera al Capitolo ed al Clero, al Senato ed al Popolo Spalatense, affermando non esser egli consapevole di alcuna colpa, per la quale dai suoi figli era così indegnamente trattato; aver egli scacciato le false accuse di eresia e di sospetta dottrina; aver egli radunato le

molte autorità e le opinioni dei vecchi Padri per ciò che si riferisce al caso suo, e valersi finalmente del diritto di designare il suo successore, ch'egli promette sommamente atto a sostenere l'alto ufficio con soddisfazione di tutti. Questa lettera, scritta in lingua italiana, troviamo voltata in latino nella storia del Farlati, ove, ognuno che il voglia, potrà leggerla per disteso. La stessa leggesi altresì nel libro *De Dominis, suae profectionis consilium* (1), ed è datata da Venezia, 20 settembre 1616. È un documento notevole: l'Autore intende sopratutto di provare ch'egli ha soltanto ceduto alla voce della propria coscienza, prendendo una determinazione che doveva gettarlo nella miseria. Breve tempo egli si trattenne a Venezia. Nello stesso anno 1616 passò a Coira, in Isvizzera, indi a Eidelberga e finalmente a Londra.

Colà egli si trattenne alcuni anni che furono, se non i più lodevoli, certo i più splendidi della sua vita avventurosa. Vide Giacomo I e Bacone da Verulamio. Cromwell aveva 17 anni. Milton ne aveva 8. L'Inghilterra, vinta la lega cattolica di Filippo II e poste le basi dell'immenso suo traffico, veniva maturando, anche sotto l'imbelle figlio di Maria Stuarda, il suo spirito pubblico e la sua poderosa costituzione. Erano però quelli i tristi giorni delle guerre religiose, che dal tempo della proclamazione della Riforma, in mille guise e con replicato furore laceravano l'Europa. Giacomo I, che allora era in lotta coi cattolici, accolse onorevolmente l'esule italiano da cui sperava trarre grande vantaggio a' suoi intenti politici e religiosi. Gli diede ricchi benefizî e lo creò decano di Windsor. Fu in quel tempo

(1) Londini, 1616, in 4°, pag. 5-24 e seg.

che M. A. De Dominis compose l'importante opera *De Republica Christiana* (1), già da lunghi anni meditata, ove espose il suo vecchio disegno di una grande riforma ecclesiastica, e si indusse anche a discutere in molti punti la stessa autorità del Pontefice. Il libro levò grande rumore: le facoltà teologiche di Parigi (2) e di Colonia lo censurarono: De Dominis continuò con ardore l'opera sua, che uscì intera nel 1620 (3). Famosa è pure la sua predica fatta nella *Cappella delli Mercieri* in Londra nel 1617, pubblicata in un'edizione i cui esemplari sono rarissimi. Nel 1618 pubblicò ancora un libro intitolato: *Scogli del cristiano naufragio quali va scoprendo la Santa Chiesa,* e di cui trovasi una edizione francese. Pregevole sopratutto per copiose notizie autobiografiche è l'opera già citata: *De Dominis, suae profectionis consilium,* che uscì per le stampe in Londra fin dal 1616. Ivi egli si difende dalla taccia di eretico, dimostra che i suoi principî non contengono nessuna infrazione ai dogmi della Chiesa cattolica e mette in rilievo il suo intendimento di riuscire a pacificare le fazioni religiose che deturpavano quel secolo sciagurato. Io non discuto nè le sue ragioni, nè il suo torto, trattandosi di una questione religiosa, estranea, lo ri-

(1) La prima parte uscì a Londra, 1617; e a Eidelberga nel 1618. Vi ha un'edizione di Francoforte, del 1658.

(2) La memoria che a Parigi impugnò l'opera di De Dominis è intitolata: " Pro sacra Monarchia Ecclesiae Catholicae, adversus Republicam M. A. De Dominis, Parigi, 1823.

(3) L'anno precedente egli aveva pubblicato a Londra, facendosene editore, l'opera di Fra Paolo Sarpi sul Concilio di Trento, apponendovi questo curioso titolo: " Historia del Concilio Tridentino nella quale si scoprono tutti gli artificî della Corte di Roma per impedire che nè la verità dei dogmi si palesasse, nè la riforma del Papato e della Chiesa si trattasse; *di Pietro Soave Polano.* "

peto, alla natura de' miei studi. Posso dire soltanto che, fosse improvvisa debolezza di animo, o abituale volubilità del suo infiammabile ingegno, o stanchezza di tanti onori, o desiderio intenso della patria lontana, egli cedette finalmente agli inviti del nuovo papa Gregorio XV, suo amico, che, per mezzo dell'ambasciatore di Spagna gli facilitò il modo d'imbarcarsi segretamente e di ritornare in Italia.

Così egli col fatto si diede torto, e questo suo torto confermò e dichiarò cogli scritti. Ma ciò che in tanta e sì deplorevole incostanza di spirito salva, se non altro, la nobiltà del carattere, è il fatto ch'egli abbandonando l'Inghilterra lasciava dietro di sè onori e ricchezze, come già prima aveva lasciato ogni cosa, spogliandosi, per propria colpa, dell'Arcivescovado di Spalatro. Morto poco dopo Gregorio, che gli era stato oltremodo benevolo e lo aveva di nuovo elevato ad alte ed invidiate dignità ecclesiastiche, venne egli tosto dalla Romana Inquisizione accusato di ulteriori accordi col re d'Inghilterra e, da Urbano VIII, fatto imprigionare in Castel Sant'Angelo.

V.

Morte e condanna.

Il processo di Marco Antonio De Dominis è considerato dal Limborch come un caso notevole di condanne postume inflitte dal Tribunale dell'Inquisizione nel secolo XVII. Il Limborch, nella sua *Historia Inquisitionis,* ci offre i maggiori e più preziosi particolari

finora pubblicati in proposito (1), e tolti in parte dal Bzovio.

F. Desiderio Scalea, dell'ordine dei predicatori, nominato cardinale di Cremona, uno fra i Generali Inquisitori, venne dal Papa delegato ad esaminare la causa. Marco Antonio De Dominis, tratto in presenza dello Scalea, affermò esser egli convinto che la Chiesa Romana e i Protestanti assentissero in tutti gli articoli fondamentali della fede; aggiunse che degli altri, nei quali dissentono, non esiste uguale necessità. Disse che i Protestanti si possono perdonare fino a quando la difficile questione non sia stata esaminata e svolta più minutamente, potendosi dubitare se abbastanza sia stata discussa e definita dal Concilio di Trento.

Qualunque apprezzamento si voglia dare favorevole o contrario alle idee del filosofo dalmatino, gli è certo che, stando al racconto del Limborch, dopo siffatte esplicite dichiarazioni colle quali affrontava le non lievi conseguenze della sua passata condotta, egli mostrò durante l'istruttoria del processo molta magnanimità e grandezza d'animo.

La congregazione dei Cardinali Generali Inquisitori giudicò essere necessarî i Censori. Questi ultimi, esaminata la causa in presenza del Cardinale Cremonese, giudicarono unanimi essere le proposizioni eretiche. Interrogato il De Dominis se volesse persistere nelle sue eresie, egli rispose che vi persisterebbe fino a che la Sede Apostolica le avesse formalmente dichiarate tali: allora egli sarebbe stato pronto ad abiurarle.

(1) Philippi a Limborch, SS. Theologiae inter Remonstrantes Refessoris, *Historiae Inquisitionis*, cui subjungitur Liber Sententiarum inquisitionis Tholosonae — Amstelodami, 1692 — V. pag. 361-63.

Così stando le cose, preparava egli col difensore da lui scelto, la sua difesa, se non che una grave malattia gli sopraggiunse che in breve tempo lo trasse in fin di vita. Morì dopo aver dati i segni della penitenza e e ricevuti i sacramenti. Il corpo, per dissipare alcune voci, venne esplorato da valentissimi medici di diverse nazioni, i quali tutti, diligentemente osservati gli intestini, concordi asserirono essere egli morto di naturale malattia.

Il processo venne proseguito. Nessuno si incaricò, nè parenti, nè amici, secondo l'invito del Tribunale dell'Inquisizione, di difendere la memoria dell'Arcivescovo defunto. Per venir pienamente alla sentenza, più volte in presenza del Sommo Pontefice e dei Cardinali Generali Inquisitori, dei Teologi e Giurisperiti, seduti in consiglio, fu esposta la cosa e sottilissimamente esaminata. Finalmente a tutti parve doversi eseguire sul morto le stesse pene che si avrebbero dovuto applicare al vivo, giusta la forma e la qualità delle accuse.

Data questa deliberazione, il 21 dicembre 1624 fu destinato per pronunziare la sentenza. Sul primo albeggiare di questo giorno, alla chiesa della Minerva, straordinariamente affollata di popolo accorso allora in Roma per il Giubileo, si preparava questa funebre e triste solennità. La navata di mezzo dell'edificio, dalla prima alla quarta colonna, era occupata da un saldo assito, formante un palco, come quello di un teatro. Altri palchi si protendevano ai fianchi ove erano seduti i porporati, i cortigiani ed i nobili: a destra dell'ingresso il sacro Senato, a sinistra i ministri inferiori dell'Inquisizione, il Prefetto della città ed i suoi uffi-

ziali. Dinanzi al pergamo stava il ritratto di Marco Antonio, vestito di nera veste casalinga e la cassa unta di pece nella quale era rinchiuso il cadavere.

Un sacerdote sale finalmente il pergamo, e con voce sonora legge in lingua volgare il compendio del processo e la sentenza con la quale Marco Antonio venne dichiarato eretico e colpevole di doppia apostasia, soggetto quindi alla censura e pena imposta dai sacri Canoni e dalle costituzioni Pontificie. Il De Dominis era quindi dichiarato spoglio di ogni onore e di ogni prerogativa connessa colla precedente dignità ecclesiastica; dannata la sua memoria e scancellata dal foro ecclesiastico. Il suo cadavere e il suo ritratto venivano consegnati in potere del Prefetto, e al fisco i suoi beni. Letta la sentenza, il Prefetto della città ed i ministri portarono il cadavere, l'immagine e gli scritti, raccolti sopra un medesimo carro, nella piazza detta Campo dei Fiori, in mezzo a numerosa moltitudine. Quivi il cadavere, estratto dalla cassa fino al termine del petto, fu mostrato alla folla, e poscia, insieme coll'effigie e cogli scritti, dato alle fiamme. (1).

(1) Ecco un documento inedito dovuto alla cortesia di un egregio uomo, che lo raccolse per me nella Biblioteca Vaticana. Credo opportuno di riportarlo per intero sia per le varianti di fatto che esso contiene rispetto alla narrazione del Limborch, come per la forma curiosa nella quale ci si mostra la narrazione medesima.

" A dì 20 di dicembre 1624 nella chiesa della Minerva furono pubblicati li processi di due heretici uno già morto et l'altro vivo: il morto fu Marco Antonio De Dominis, vescovo di Spalatro, che si era in Inghilterra fatto Papa (1617) et poi essendo stato condotto a Roma et messo in Castello, essendosi poi pentito et disdetto delle heresie passate, era finalmente morto. Ma doppo la sua morte si scoperse che di novo dopo di esser tornato alla fede catholica haveva scritto altre lettere al Re dell'Inghilterra heretico et per questo fu il suo corpo disot-

Il Limborch afferma aver egli voluto riferire questa istoria non tanto per la celebrità del personaggio e la memoria allora recente del fatto, quanto perchè in questo tutto ciò che in un processo contro i morti si richiede, esattamente e con ogni possibile apparato di pubblicità venne eseguito.

È cosa troppo facile e comune oggidì l'ingrossare coraggiosamente la voce contro l'Inquisizione che non c'è più, e, quel che è peggio, in una ignoranza quasi assoluta di quei tempi feroci. Io me ne astengo: lasciando completamente liberi i miei lettori di giudicare a seconda del loro sentimento individuale, ed esortandoli sopratutto ad apprezzare un po' meglio che non sogliano fare ordinariamente (pur fra i numerosi inconvenienti che tuttodì lamentiamo), le incontestabili, serene e graduali conquiste della civiltà.

Così finì Marco Antonio De Dominis, non ultimo fra i grandi ed infelici italiani del secolo XVII. Giordano Bruno, simile a lui nell'ingegno, lo aveva preceduto

terrato dalla chiesa de' Santi Apostoli et insieme con un suo ritratto fu pubblicamente in Campo de' fiori abbruciato nel giorno di S. Tommaso apostolo et il dì seguente fu ancora abbrugiato vivo l'altro heretico che essendo frate diceva ogni giorno quante messe li piaceva.

(*Diario di Giacinto Giglio*, manoscritto nella Biblioteca Vaticana).

Il Gigli era vivo a quel tempo e dimorava in Roma. L'asserto di lui concorda con altro diarista, il Vallena. Veggasi pure a questo riguardo la memoria del signor Alessandro Ademollo nella *Nuova Antologia* fascicolo di febbraio 1877 che riporta ad esempio quanto segue:

" 1623. L'arcivescovo di Spalatro apostato' et andò in Inghilterra con un monaco Benedettino. Finsero di ritornare cattolici. Venuti in Roma furono ribenedetti. Fra poco tempo l'Arcivescovo morì e fu sotterrato nella chiesa della Minerva. Per via di certe lettere fu scoperto che ancora persisteva nell'eresia, fu disotterrato et il cadavere fu brugiato in Campo il Fiore; il Monaco Benedettino per alcuni furti fatti in San Pietro fu degradato e giustiziato.

nell'infortunio. Paolo Sarpi era morto l'anno innanzi. Tommaso Campanella gemeva da lunghi anni nelle carceri di Napoli. E Galileo Galilei, tornato per sua sventura in Toscana, scriveva in quei giorni il *Saggiatore* e meditava, monumento eterno del suo nome, i *Dialoghi dei Massimi Sistemi.*

Torino, 1° settembre 1883.

FINE DEL PROEMIO

CORREZIONI

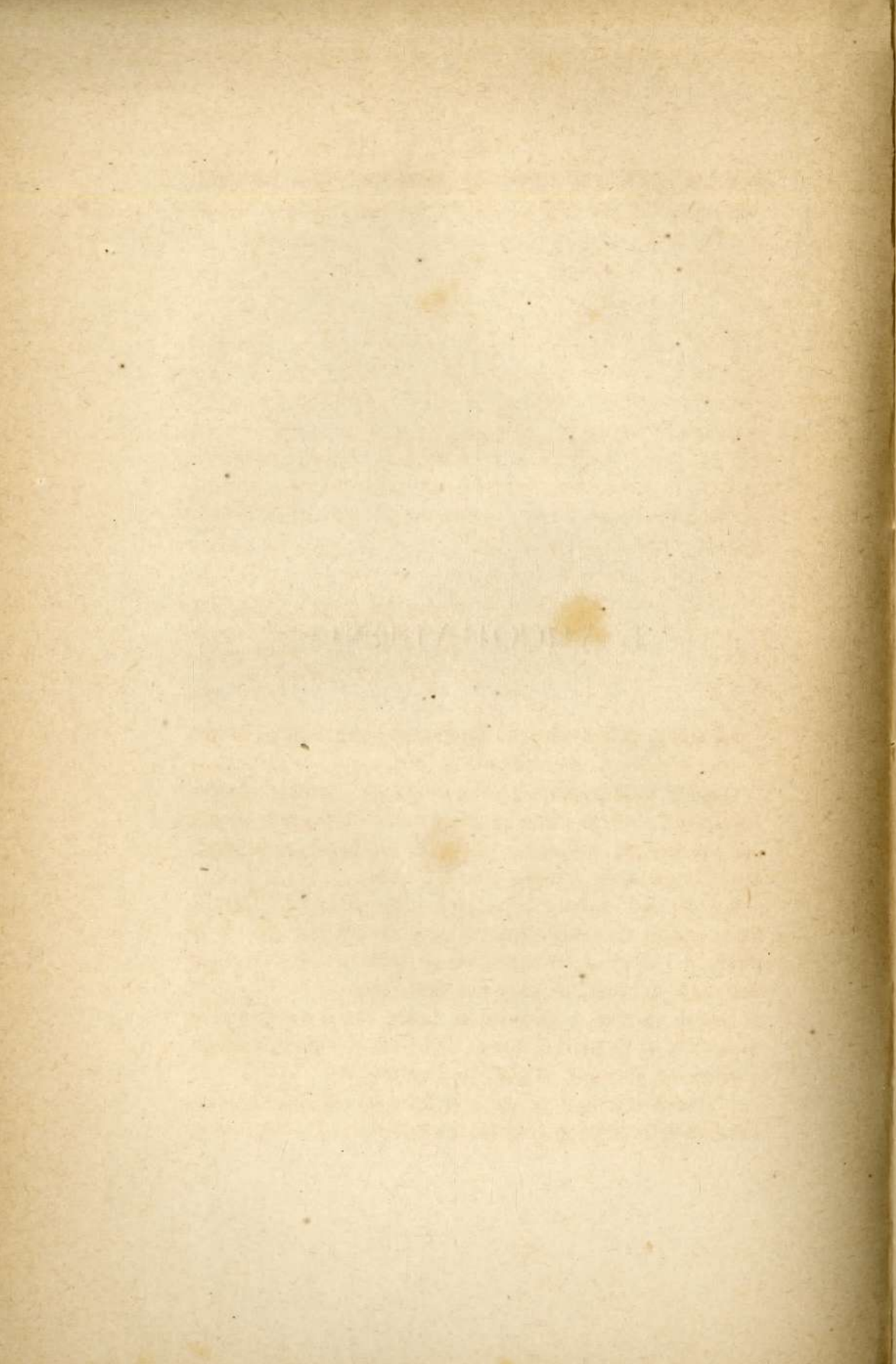
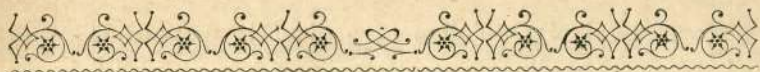
che il lettore deve eseguire a mano da sè prima di leggere il libro.

Accomodare gli indici della formula degli angoli a pag. 13.

Porre	TAV. III, fig. 1	invece	di fig. IV	a pag.	13 lin. 27
„	TAV. IV	„	di TAV. III	„	19 „ 10
„	„	„	„	„	21 „ 17
„	„	„	„	„	26 in nota
„	TAV. V	„	di TAV. IV	„	34 linea 1

togliere l'y^2 alla prima formola in nota, pag. 38.

Correggere $ab + \sqrt{-1}$ in $a + b\sqrt{-1}$ a pag. 64.

L' ARCOBALENO

Descrizione Sintetica.

§ 1.

> La teoria delle ondulazioni precede e determina i fenomenj di diffrazione così esattamente come la teoria della gravitazione i movimenti dei corpi celesti.
>
> SCHWERD.

La teoria dell'arcobaleno forma oggi una delle parti più complete della teoria fisica della luce.

Quando nella regione a cui rivolgiamo il nostro sguardo l'orizzonte è attraversato da una corrente di gocciole acquee e il sole declina o s'innalza dietro di noi la nostra prospettiva si allieta nel dipinto arco dell'iride.

L'arcobaleno presenta due archi concentrici ad intervallo assai grande uno dall'altro e il cui centro corrisponde al punto del cielo ove rimarrebbe proiettata nella direzione dei raggi del sole, la testa dell'osservatore.

L'arco interiore è disposto in modo che il violetto è al di dentro, al di fuori il rosso; fra l'uno e l'altro l'indaco, il turchino, il verde, il giallo e l'aranciato.

Nell'arco esteriore, di cui i colori sono assai men vivaci, l'ordine della serie riscontrasi invertito.

Scorgesi talvolta un'altro arco disposto nell'ordine stesso del primo e che s'incurva pallidissimo ed ampio nello spazio de' cieli.

Si osserva di frequente l'arcobaleno nelle goccie d'acqua che si dispiccano in una estrema suddivisione e si sollevano a nembi dalle cateratte dei fiumi. La grande cascata del Niagara, descritta dal Capellini e poetizzata dal Regaldi nel suo nuovo volume di lirica scientifica, s'aderge fra l'Eriè e l'Ontario ravvolta al disotto in una nube da cui si svolgono al nostro occhio iridi svariate che si modificano sensibilmente secondo la diversa inclinazione del sole.

Strane particolarità offre talvolta questo fenomeno meteorico. In certi casi si avverte un'iride *a doppia curvatura*, dipinta sulla superficie di un cono il cui vertice corrisponde all'occhio dello spettatore. Vedesi non di rado un'arcobaleno nelle bollicine di rugiada deposte sulle cime dei fili d'erba di un prato. Archi orizzontali si veggono ancora in mare allorquando i suoi flutti agitati lanciano con forza nell'aria in forma di larghi spruzzi una quantità stragrande di minutissime goccioline. Simili iridi, chiamati *arcobaleni marini*, si mostrano quasi sempre ben poco distinti a cagione forse della irregolarità delle goccie.

Nelle regioni polari, o sulle vette dei monti, quando il sole è sopra o presso l'orizzonte, l'ombra di una persona è proiettata nella nebbia, e il suo capo apparisce accerchiato da anelli o circoli colorati e concentrici, il cui numero varia da uno a cinque. Il dottore Scoresby vide una volta quattro di questi anelli intorno all'ombra della sua testa, mentre egli stavasi fra il sole e una bassa e folta nebbia: il primo anello si componeva di striscie concentriche bianche, gialle, rosse e porporine, il secondo si componeva di striscie concentriche turchine, gialle, rosse e porporine; il terzo di verdi, bianche, giallastre, rosse e porporine, e nel quarto le striscie erano verdastre e più cupe negli orli. Green all'altezza di due miglia, vide l'ombra

del suo pallone circondata da tre anelli colorati, in una nuvola sottostante (1).

Ulloa e Bougner, soggiornando sul Pichincha, videro un fenomeno analogo, il quale essi giustamente attribuirono ad una formazione di arcobaleni. Ulloa così descrive la meteora:

“ La cima del monte era interamente coperta di dense nubi: il sole sorgendo dissipò quelle nubi e non rimasero nel cielo che leggieri vapori difficili a distinguersi. Tutto ad un tratto dal lato opposto a quello ove sorgeva il sole ciascuno dei viaggiatori scorse ad una dozzina di tese dal luogo da esso occupato la sua immagine riflessa nell'aria come in uno specchio; la immagine era posta al centro di tre arcobaleni coloriti di varie tinte ad una certa distanza da un quarto arco di un solo colore. La tinta più esterna di ogni arco era carnicina o rossa; quella successiva era aranciata, la terza gialla, la quarta paglierina, l'ultima verde; tutti gli archi erano perpendicolari all'orizzonte; si muovevano e seguivano in tutte le direzioni la persona di cui circondavano l'immagine a foggia di aureola. Notevole poi era il fatto che, sebbene i varii viaggiatori fossero riuniti in un solo gruppo, ciascuno di essi non vedeva il fenomeno che relativamente a sè stesso, e negava che si ripetesse per gli altri. L'estensione degli archi andò progressivamente aumentando in proporzione dell'altezza del sole; al tempo stesso i loro colori si dileguarono, gli spettri divennero sempre più pallidi e confusi e finalmente il fenomeno cessò del tutto. Al principio dell'apparizione la forma degli archi era ovale; verso la fine si mostrò perfettamente circolare. „

Mi sono diffuso più che non convenga in una memoria come la mia, in queste descrizioni complessive delle varie apparenze di iridi avvertite dagli scrittori, premendomi anzitutto di distinguere questi fenomeni dagli aloni coi quali nei libri sono il più delle volte stranamente confusi. Gli

(1) *Maria Somerville.* — Connessione delle scienze fisiche. Sezione XVIII. Geografia fisica, vol. I c. 24, § 6.

aloni, che circondano il sole con ampi cerchi o con una combinazione complicata di cerchi (1) e che, prodotti dal cadere della luce sopra minuti cristalli di ghiaccio sospesi nell'atmosfera sono frequenti e splendidi nelle alte latitudini, rimangono situati fra l'osservatore e il sole (2) mentre le *glorie*, le *corone* e gli altri anelli colorati concentrici di cui si è parlato in questo paragrafo, stando alle osservazioni dei viaggiatori, appartengono evidentemente al tipo arcobaleno.

Il presente cenno descrittivo dell'iride sarebbe tuttavia incompiuto ove non si facesse subito menzione degli *archi secondarî* o *supplementarî* che quando il fenomeno è molto spiccato, si veggono dal lato concavo dell'arco interno e dal lato convesso dell'arco esterno, in forma di striscie colorate verso la parte culminante della duplice curva luminosa.

Merita inoltre di essere ricordata una specie singolare di arcobaleni, detti *incrociati* e *rovesciati*.

Se i raggi solari si riflettono sulla superficie di un'acqua tranquilla, sappiamo che seguono quella direzione stessa che seguirebbero se partissero dalla immagine simmetrica del sole formata da quello specchio liquido. Ed ecco quindi che essi possono dar luogo alla formazione di due arcobaleni, il cui centro sarà collocato sulla retta congiungente l'occhio dell'osservatore col centro dell'immagine del sole. Supposto ora che la pioggia cada dal lato opposto a questo astro, sarà permesso di vedere, indipendentemente dai due archi diretti, uno o due altri archi simili ai primi nei colori, aventi lo stesso diametro apparente ed incrocianti i primi in parecchi punti. Tuttavia rarissime volte è sensibile l'arco secondario.

Quando il sole è molto elevato al di sopra dell'orizzonte nel caso della produzione di un arco per riflessione, può

(1) Tale fu quello veduto a Pietroburgo il 29 giugno 1790.

(2) Young ha ottenuto anelli iridescenti facendo passare la luce di una candela attraverso una lastra di vetro cosparsa di polvere di licopodio. Ciò non esclude la distinzione qui adottata.

avvenire che si formi un cerchio intero; se allora la porzione superiore si dilegua, rimanendo soltanto l'inferiore si ha l'*arco rovesciato*.

§ 2.

L'arcobaleno risulta dalle varie modificazioni che la luce assume dentro le goccie e dalla riflessione di essa sulla faccia interna delle medesime. E siccome la sua apparizione è subordinata all'altezza del sole e alla posizione dell'osservatore fra il sole e i vapori che precipitano, facilmente si è indotti a concludere che, per un punto di vista determinato e fisso, *non tutti* i raggi rifratti dalla superficie esterna convessa e riflessi dalla superficie concava interna dei suoi liquidi globicini, danno luogo per noi effettivamente al fenomeno in questione: bensì *tutti possono* offrire occasione al fenomeno stesso qualora si cangi opportunamente la posizione dell'occhio nello spazio circostante come ha dimostrato per primo Antonio De Dominis con diffusione e lucicidità tutta geometrica.

Le condizioni nelle quali si determina la visione dell'arcobaleno vale a dire l'opacità della nube scioglientesi in pioggia, la necessaria obliquità del sole e il fatto che dalla sua luce escono i colori, non isfuggirono allo sguardo di Lucrezio; e fa meraviglia come in un tempo in cui esse erano prive di qualunque significazione teorica e non avevano alcuna importanza razionale riconosciuta, egli abbia saputo delinearle in pochi tratti nel suo poema (1). Meno esatto fu Dante, allorchè, descrivendo incidentalmente l'arcobaleno, innamorato della bellezza di una immagine ardita reputò l'iride ancella dell'aria. (2).

(1) De Rerum Natura — L. VI.
(2) Paradiso — C. XII. v. 12.

Keplero, l'autore di quella famosa teoria dei vortici il cui abbandono, secondo alcuni, valse a Newton la scoperta della legge di gravitazione, e che ciò non ostante oggi ci si rivela come tale da poter esplicare la causa mediata della gravitazione stessa (1) nello squilibrio delle densità eteree dell'universo, è forse (2) il primo che abbia tentato una spiegazione scientifica dell'iride, e che, dicesi, in una lettera (che io non sono riuscito a trovare in nessuna parte) scritta fin dal 1606, abbia cercato di rilevarne la teoria. Cito di passaggio questo fatto poichè non posso addurlo con certezza, come non poteva esser certo di sè medesimo il dott. Gustavo Milani quando ripeteva, dietro affermazione dello Zantedeschi, che Oerstedt era stato prevenuto nella scoperta dell'elettro-magnetismo da Giandomenico Romagnosi (3).

Ma noi sappiamo che De Dominis (4) prima e Cartesio poi hanno dato un maggiore sviluppo a quel primo abbozzo di teoria e che anzi lo stabilirono su nuove basi colla nozione dei raggi efficaci prima della scoperta della composizione della luce bianca.

De Dominis non ha che un'idea vaga dei *raggi efficaci,* ma tien conto esatto delle differenze di cammino dei raggi diversi, e tenta, come già si disse nel proemio, una spiegazione ingegnosa della loro varia chiarezza.

È poscia a Isacco Newton che è dovuto il primo compimento della teoria matematica dell'arcobaleno, della quale cercherò subito di mettere in rilievo i tratti principalissimi in

(1) *A. Secchi* — Unità delle forze fisiche.

(2) " Il paraît que longtemps avant Descartes, le frére Théodoric, en 1300, expliquait l'arc-en-ciel. (Ann. de chim. et de phis., t. 6)" Desprez — Traité de Phisique — Bruxelle, 1840.

(3) Secondo una memoria pubblicata a Padova dal Prof. Zantedeschi nel 1857, Romagnosi avrebbe fatto questa esperienza a Trento nel 1802 scoprendo per il primo la mutua azione delle calamite sulle correnti e delle correnti sulle calamite. Il prof. Govi in una memoria recente, ma pochissimo conosciuta, delucida la questione e dimostra falsa la notizia dello Zantedeschi.

(4) *Antonio De Dominis* — De Radiis visus et lucis — Venezia, 1821.

forma affatto geometrica e sintetica, come la espose il De Dominis, riserbandomene la trattazione analitica alla seconda parte di questa memoria compilativa.

Si consideri la figura alla Tav. I. Siano *a*, *b*, *c*, tre gocciole sospese; *sa*, *sb*, *sc*, tre raggi di sole.

Il raggio *s a*, incontra la prima di queste goccie in *a*, e rifrangesi in *d:* una parte della sua intensità va perduta fuori, l'altra parte si riflette in *e*, dove si rifrange di nuovo per dirigersi all'occhio dell'osservatore. I raggi *sb*, *sc*, subiranno anch'essi la medesima trasformazione nelle gocciole *b* e *c*, e si divideranno anch'essi nei tre colori *rosso, giallo* e *turchino* coi loro composti e saranno mandati (una parte almeno del fascio conico che ne emana) al nostro occhio in *O*.

Ora l'occhio vede il color rosso (il meno rifrangibile) dal punto *e*, il color giallo dal punto *g*, il color turchino (il più rifrangibile) dal punto *i:* e siccome questi colori sono riflessi nello stesso modo e nelle stesse condizioni, rispetto al punto *o*, da tutte le innumerevoli goccioline sospese nell'atmosfera a uguale distanza da questo medesimo punto di veduta, così ne viene che, dovendo essere questa ugual distanza sopra un arco di cerchio, i punti isocromatici formeranno archi, e l'occhio percepirà il curvo fascio dell'arco baleno.

Per un altro osservatore il raggio riflesso della goccia *b'* potrebbe essere rosso invece di giallo; quello riflesso dalla goccia *c*, giallo; mentre il turchino potrebbe pervenirgli da qualche goccia collocata nel medesimo piano al di sotto della precedente.

Per una terza persona il rosso potrebbe provenire da un punto situato al di sopra di *a;* ed in allora *a* potrebbe riflettere il giallo, e *b* il turchino.

Questo primo arco è prodotto, come vedesi, dai raggi che entrano dalla parte superiore delle goccie e sono riflessi al disotto delle medesime; il secondo invece è formato dai

raggi che entrano dalla parte inferiore delle goccie e sono riflessi al disopra di esse.

Il raggio *sf'*, che colpisce la gocciola *a'* del secondo arco, si frange la prima volta in *e'* per riflettersi in *d'* ove si riflette una seconda volta in *a'* donde esce rifratto al mezzo meno denso dell'aria per dirigersi all'occhio in *o*. Certamente che solo un piccolissimo fascetto luminoso, di tutto il fascio conico che emana da *a'*, arriverà ad essere percepito.

Ora, se nell'arco interno, per il quale i raggi erano entrati alla parte superiore delle goccie e rifratti al disotto, i colori si presentavano secondo un certo ordine, in questo nuovo arco che abbiamo preso ad esaminare, vedendosi soltanto i raggi entrati alla parte inferiore delle goccie e rifratti al disopra, i colori si troveranno naturalmente invertiti.

Siano *a'*, *b'*, *c'* tre goccie di pioggia nell'arco esterno.

L'occhio collocato in *o* vede il turchino di tutte le goccie che si succedono a luogo della *a'*, il giallo di quelle che si succedono a luogo della *b'*, e il rosso di quelle che rimangono più in basso.

Dovrà dirsi anche qui che, siccome questi colori sono riflessi nel medesimo modo da tutte le innumerevoli goccioline equidistanti dal punto di veduta, dovendo essere questa ugual distanza un arco di cerchio (sezione retta di un cono di cui l'occhio è il vertice), i punti isocromatici formeranno archi, e l'osservatore otterrà la percezione del curvo fascio dell' iride.

Descrizione Analitica.

§ 1.

Lo studio dei fenomeni di diffrazione prodotti dalle onde sferiche è tutt'ora assai imperfetto: un sol caso è stato trattato (1): ed è appunto questo dell'arcobaleno.

Per stabilire nettamente il concetto fondamentale del fenomeno è qui in ispecial modo necessario di seguir col pensiero un raggio qualunque e, sulle norme fornite già dall'esperienza, ricostruirne teoricamente il multiforme viaggio attraverso una sferetta acquea sospesa nell'atmosfera. Supponiamo il sole ridotto ad un punto. Non avremo bisogno di considerare che ciò che succede nel piano passante per l'astro, il centro della goccia e l'occhio dell'osservatore. Siccome tutto è simmetrico attorno al raggio che passa normalmente alla superficie pel centro della sferetta, così basterà considerare solo ciò che accade in un piano condotto per questo raggio. Or tale è appunto quello passante per l'occhio dell'osservatore: e tale pur sia il piano stesso del nostro foglio ove, naturalmente, esprimeremo la gocciola per mezzo della sua sezione massima.

(1) VERDET. *Leçon d'Optique Phisique*, Tom I.

Abbiamo un fascio di luce SI (fig. 1, Tav. II). Alla sua incidenza in I, una porzione penetrerà nella goccia, e si rifrangerà alla maniera ordinaria. In I' si farà una nuova separazione, una porzione uscirà fuori, un'altra si rifletterà nel modo già detto precedentemente, e anderà a ferire la superficie della goccia in I''. La luce rifratta in I'' può incontrare l'occhio dell'osservatore in V. La posizione di quest'ultimo, rispetto al sole, ci mostra che la luce non riflessa dalla goccia è perduta per lui. Ecco adunque una prima perdita di luce. Ora: i raggi emergenti in I'' subiscono una dispersione anch'essi precisamente come nel caso di prima. L'occhio riceverà, nel piano che abbiamo considerato, una mescolanza di raggi di modo che la sensazione risulterà confusa, e l'impressione sarà debole a causa della dilatazione del fascio oltre alla perdita già fatta nella prima dispersione.

È necessario, perchè l'occhio riceva un'impressione viva dei diversi colori, che ciascuno di essi offra un fascio di raggi non divergenti, ma paralleli alla loro emergenza. Sono questi raggi che sono stati chiamati *efficaci*, e che Cartesio ha avuto il merito di porre a base della sua teoria.

Si tratta di cercare, sia per mezzo dell'esperienza, come per mezzo del calcolo, le condizioni nelle quali hanno luogo i raggi efficaci. Ricorriamo subito all'esperienza colla quale potremo stabilire gli elementi dell'analisi, e dal caso particolare giungere per deduzione gradatamente al caso generale, come il Desprez (1), o arrivarvi immediatamente in diversi modi, come fra gli altri il Verdet (2) od il Mossotti (3).

Se si fa cadere un certo numero di raggi di luce sopra una goccia sferica di acqua e si cerca per ciascuno di essi (fig. II) la *deviazione totale*, vale a dire l'angolo del

(1) C. Despretz. Op. cit.
(2) Verdet. — Op. cit.
(3) Mossotti. — *Sez. di Fis. Mat.*, Firenze, Piatti, 1845.

raggio incidente col raggio emerso diretto all'occhio dell'osservatore, si comincierà a trovare che quest'angolo è zero per un'incidenza perpendicolare, e che il suo valore cresce fino ad un certo limite di incidenza, limite che per l'acqua fu riconosciuto essere di 59° 23′ 30″ (raggi rossi): nel qual caso la deviazione per una riflessione sola sarà di 42° 1′ 40″.

Per vedere come l'angolo di deviazione totale arrivi ad un limite (fig. III), è necessario osservare ch'esso ha per valore il doppio dell'arco I″ O. Infatti:

$$\frac{1}{2}\left(II' - mn\right) = Iq - mI'' = Ip + pq - mI''$$
$$= mo + I''o - mI'' = mI'' + 2I''O - mI'' = 2I''O.$$

Siano pertanto due raggi paralleli SI SI'' incidenti (fig. II): man mano che l'arco diviene più obliquo i raggi rifratti si inclinano e arriva un termine nel quale le estremità di due di essi si incontrano e si confondono in un punto b.

Insomma: per due raggi molto vicini si ha sempre un incidenza tale rispetto alla superficie della goccia d'acqua che, fissatone uno, fra tutti gli infiniti raggi rifratti incontranti il suo, l'altro è il solo che lo trovi alla superficie dalla parte interna della goccia medesima. Al di là di questo limite i raggi rifratti s'incontrano dentro la goccia, e l'angolo D diminuisce coll'arco $I'O$. Dopo tutto ciò si vede facilmente che i raggi sI' sI'' corrispondono al massimo dell'angolo D, ed emergono paralleli mentre gli altri divergeranno sempre e non produrranno sull'occhio che un'impressione troppo lieve per essere sensibile.

Si consideri la figura IV sia un raggio s che dopo la rifrazione dentro la sferetta acquea, prende in I' la, direzione DV. L'angolo di deviazione sarà uguale a $2r - 2i + \pi$, i essendo l'angolo di incidenza, r l'angolo di refrazione. Infatti, la somma dei quattro angoli di un quadrilatero,

come nel caso nostro $ICI'D$, è uguale a quattro retti; ed ancora i ed i' sono eguali per simmetria di figura, come pure r ed r'. Si avrà:

$$D + 2i + C = 2\pi$$

da cui:

$$D + 2i + \pi - 2r = 2\pi$$

(essendo il supplemento di C, angolo esterno del triangolo CII', uguale a $2r$). Da quest'ultima ricavo il valore di D già enunciato:

$$D = 2r - 2i + \pi$$

Veniamo al caso di due refrazioni separate da una riflessione intermediaria. Essendo ICI'' doppio di ICI', si avrà:

$$D + 2i + 2(\pi - 2r) = 2\pi$$

e quindi

$$D = 4r - 2I \qquad (1).$$

Si potrebbe mettere in questa formola i diversi valori dell'angolo d'incidenza i e i valori corrispondenti dell'angolo di refrazione r per i sette colori.

Sarà molto più comodo il cercare il valore dell'angolo d'incidenza corrispondente al massimo o al minimo dell'angolo di deviazione. Applico alla (1) le condizioni analitiche del massimo o del minimo, eguagliandone la differenziale a zero.

$$dD = o \qquad 2dr - di = o \qquad (2)$$

Ora si sa che

$$n = \frac{sen\ i}{sen\ r}$$

essendo n l'indice di rifrazione. Differenziando quest'ultima espressione, avremo:

$$di \cos i = n \, dr \cos r.$$

Ma siccome dalla (2) ricaviamo

$$d i = 2 \, dr$$

così sostituendo si otterrà:

$$2 \cos i = n \cos r \qquad (3).$$

Quadro questa e la $sen \, i = n \, sen \, r$ e faccio la somma.

$$4 \cos^2 i + sen^2 i = n^2$$

Or

$$sen^2 i = 1 - \cos^2 i$$

onde:

$$3 \cos^2 i = n^2 - 1$$

Da cui ricavando $\cos i$ ottengo la condizione d'incidenza dei raggi efficaci nel caso di una sola riflessione interna qualunque sia il liquido di cui è formata la goccia sferica.

$$\cos i = \sqrt{n^2 - 1} \qquad (4)$$

Quest'espressione che, come si è detto, è generale per il primo arco dell'iride posso applicarla al caso dell'acqua.

Si dovrà quindi considerare un indice di refrazione determinato e fisso per ciascun colore.

Raggi rossi

$$n = \frac{108}{81}$$
$$i = 59^\circ \, 23' \, 30''$$

da cui

$$r = 40^\circ\ 12'\ 10''$$
$$D = 42^\circ\ 1'\ 40''$$

Raggi violetti

$$n = \frac{109}{81}$$

$$i = 58^\circ\ 49'\ 30''$$
$$r = 39^\circ\ 24'\ 20''$$
$$D = 40^\circ\ 16'\ 20''$$

Se dunque consideriamo un cono avente per vertice l'occhio dell'osservatore, per asse la retta che unisce l'occhio al centro del sole e per apertura angolare uno qualunque dei valori di D compresi fra $40^\circ\ 16'\ 20''$ e $42^\circ\ 1'\ 40''$, ciascuna delle generatrici che incontra una goccia può riguardarsi come asse di un fascio di raggi efficaci. Questo cono comprende naturalmente le nuvole seguenti un arco luminoso che è appunto il primo arco dell'iride.

Le goccie poste al di sopra non possono inviare all'occhio i loro raggi efficaci che, quantunque paralleli ai primi, sono più alti. È pure evidente che la parte visibile del 1° arco proviene dai raggi che han penetrato la goccia sopra al raggio incidente normale poichè i raggi, che penetrano dalla parte inferiore sotto l'incidenza che conviene ai raggi efficaci, emergono diretti in alto. La porzione di arco fatto da questi ultimi può essere osservata al di sopra delle nuvole nelle ascensioni aereostatiche.

Tali appunto saranno i fenomeni di iridescenza osservati dal signor Green all'altezza di due miglia nelle nubi sottoposte.

Volendo considerare il caso di due riflessioni interne (che, come si sa, è quello del secondo arco colorato) si avrà subito, in analogia alle formule riguardanti al primo caso,

$$D = 3.\,2r + 2i + \pi = 2\pi$$
$$D = -(3.\,2r - 2i - \pi) \qquad (1').$$

Differenziando

$$6\,dr - 2\,di = 0$$
$$3\,dr = di \qquad (2').$$

Sostituendo in

$$\cos i\,.\,di\,. = n \cos r\,.\,dr\,.$$

avrò:

$$3 \cos i\,. = n \cos r \qquad (3').$$

Quadro questa e la $sen\, i = n\, sen\, r$ e sommo:

$$9 \cos^2 i + sen^2 = n^2$$
$$8 \cos^2 i + 1 = n^2$$
$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \qquad (4')$$

Applicando questa formola si ottiene per il 2° arco dell'iride i varî valori di i di r e di D corrispondenti ai diversi colori che ne compongono la fascia lontana e sbiadita.

Raggi rossi del 2° arco.

$$n = \frac{109}{81}$$
$$i = 71^\circ\, 49'\, 55''$$
$$r = 45^\circ\, 26'\, 50''$$
$$D = -\,50^\circ\, 58'\, 50''$$

Raggi violetti

$$n = \frac{108}{81}$$
$$i = 71^\circ\, 26'\, 10''$$
$$r = 44^\circ\, 47'\, 7''$$
$$D = -\,54^\circ\, 9'\, 38''$$

La fig. 3 ci fa vedere da che dipenda questo segno negativo del valore di D, o meglio, in che maniera si possa sinteticamente interpretarlo.

Da questi numeri è facile ricavare la larghezza apparente dell'arco interno facendo la differenza tra i valori dell'angolo di deviazione dei raggi rossi e violetti, e ottenendo per tal modo . . . . 1° 45′ 20″;
e quella dell'arco esterno in . . . . 3° 10′ 48″;
e della distanza apparente fra i due . . . . 8° 57′ 10″.

Si è finora considerato il sole ridotto a un punto, mentre si può calcolarne a 30′ il diametro apparente. Ne viene che, se noi consideriamo gli archi ora determinati come prodotti dai raggi provenienti dal centro del disco solare, i raggi degli altri punti del disco stesso formeranno altrettanti archi parziali, l'asse di ciascuno dei quali sarà una retta condotta dall' osservatore al punto del disco donde si saranno sprigionati; di modo che vi saranno, al disopra o al disotto degli archi precedenti, degli archi di 15° di larghezza. Per tal modo la larghezza di questi archi sarà aumentata di 30′, ciò che porterà la larghezza dell'arco interiore a 2° 15′ 20″, quella dell'arco esteriore a 3° 40′ 48″, riducendo la distanza fra l'uno e l'altro a 8° 27′ 10.

Si comprende benissimo oramai, dopo quanto si è detto, che, innalzandosi il sole, l'asse della visione (asse del cono dei raggi efficaci) si abbassa, e va diminuendo l'arco interiore fino alla completa sparizione di ogni sua parte visibile. Perchè ciò accada è necessario che il sole raggiunga sull'orizzonte, come si comprende facilmente, l'altezza di 42°. L'arco esterno non cessa d'essere visibile che quando il sole arriva a 54°.

§ 2.

Tanto l'arcobaleno ad una sola come quello a due riflessioni non sono altro che casi particolari del fenomeno che si considera. Si può tuttavia riassumere quanto s'è detto in

addietro colla esposizione analitica del caso generale per un numero qualunque di riflessioni. Stenderò questa teoria nella sua forma più generale secondo i criterî che ho potuto farmi colla lettura degli autori, procurando in pari tempo di scegliere dai varî trattati ciò che parmi immediatamente più opportuno nella ricerca delle condizioni di efficacia, e di delucidare quei passaggi che in essi il più delle volte trovansi sottintesi, e che non sempre i lettori riescono subito a rintracciare.

Si consideri la fig. 1 alla Tav. III. Siccome l'angolo $IOI' = \pi - 2r$, l'arco che abbraccia il totale cammino interno del raggio SI sarà:

$$\widehat{II'I''} = (K + 1)(\pi - 2\,r)$$

essendo K il numero delle riflessioni:

Onde

$$\widehat{II''} = \frac{K+1}{2}(\pi - 2r)\,.$$

Ma

$$\widehat{IOA} = i$$

perchè corrispondenti

$$\widehat{AOE} = \frac{1}{2}\,D$$

essendo D angolo di deviazione,

$$I'A = I'I + IA = \pi \pm \frac{D}{2}$$

prendendo il — quando I cade dalla parte di ED dalla quale trovasi A, prendendo il + quando cade dall'altra. Per cui se paragoniamo i suddetti valori di $\widehat{I'A}$:

$$\frac{K + 1}{2}(\pi - 2\,r) + i = \pi \pm \frac{D}{2} \qquad (1'').$$

In questa formula, come nelle altre analoghe già scritte, per una riflessione sola o due, D rappresenta la *deviazione* che si è veduto essere un massimo per la incidenza corrispondente ai raggi efficaci allorchè si ebbe a notare che crescendo i l'arco $I''O$ (fig. 3, Tav. II) diminuiva e con esso anche l'angolo D che è misurato da $_2I'O$.

Si è detto che i raggi efficaci sono, per due raggi paralleli vicinissimi, quelli che han trovato fra tutte le infinite incidenze possibili un'incidenza tale da stabilire il punto di incontro dei raggi rifratti non dentro alla goccia, come succederebbe se l'angolo i fosse molto grande, non fuori e al di là, come succederebbe (almeno teoricamente) nel caso contrario dell'angolo i molto piccolo e del fascio luminoso molto vicino a quello passante pel centro della sferetta, ma sì bene in una posizione intermedia fra l'interno e l'esterno alla superficie della sferetta medesima in modo da avervi, tutti e due questi raggi, il medesimo punto di riflessione interna. In questo caso, si è detto, emergeranno paralleli e conserveranno intensità a grande distanza, se è vero, come si è ragionevolmente ammesso in addietro, che è la dilatazione quella che affievolisce il fascio emergente.

Ma si dirà forse meglio e più esattamente col Verdet (1), che i raggi emergenti che corrispondono a raggi incidenti infinitamente vicini divergono facendo fra loro un angolo che *in generale* è un *infinitesimo di 1° ordine;* e che esiste sempre un'incidenza tale che due raggi infinitamente prossimi entrando nella goccia, ne escono con angolo fra loro tale che è un *infinitesimo di 2° ordine.*

Applico alla (1'') le condizioni analitiche del massimo e del minimo in analogia ai casi precedenti. Otterrò:

$$-(k+1)\,dr + di = 0 \qquad (2'')$$

Alla (2'') si proviene naturalmente anche colla formola esprimente il valore della *rotazione totale* come fa

(1) Verdet. — Op. cit. — T. I, p. 402.

appunto il Verdet nel suo splendido trattato di ottica matematica.

Chiamasi *rotazione* di un raggio, che si riflette o si rifrange, l'angolo della nuova direzione col prolungamento della prima; e *rotazione totale* la somma delle rotazioni parziali. Mentre la *deviazione* abbiamo convenuto non altro dover essere che l'angolo della prima colla nuova direzione del raggio. Onde si vede (1) chiaramente che la deviazione è, nè più nè meno, che il supplemento della *rotazione*, come osserva, a scanso di ogni equivoco, lo stesso Verdet. Ne viene quindi che al massimo della *deviazione*, come è il caso dei raggi efficaci, corrisponde necessariamente il minimo della *rotazione*. Dunque anche alla espressione della *rotazione totale* si hanno ad applicare le condizioni analitiche dei massimi e dei minimi per ottenere il medesimo risultato

Sia Δ la rotazione totale, dalla figura si ha:

$$\Delta = H\,I\,I' + H'\,I'\,I'' + H''\,I'\,R \qquad (\textit{fig. 1, Tav. III.})$$

$$\Delta = 2\,(i - r) + k\,(\pi - 2r)$$

e differenziando:

$$di = (k + 1)\,dr \qquad (2'')$$

Siccome dalla $sen\; i = n\; sen\; r$ si ha:

$$cos\; i\; di = n\; cos\; r\; dr$$

sostituendo nella (2'') e riducendo si ottiene:

$$n\; cos\; r = (k + 1)\; cos\; i \ldots \qquad (3')$$

Ora, dalla $sei\; i = n\; sen\; r$ si sa che quadrando:

$$1 - cos^2 i = n^2\,(1 - cos^2 r)$$

(1) $D + \Delta = 2(i - r) + k(\pi - 2r) - [(k - 1)\pi - 2(k + 1)r + 2i]$
$= 2i - 2r + k\pi - 2rk - k\pi + \pi + 2kr + 2r - 2i = \pi$
Quindi $D + \Delta = \pi$

Elimino *cos r* fra questa e la (3'')

$$1 - cos^2 i = n^2 \left(1 - \frac{(k+1)^2 cos^2 i}{n^2}\right)$$

$$1 - cos^2 i = n^2 - (k+1)^2 cos^2 i$$

Da quest'ultimo ricavo *cos i*.

$$cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{(k+1)^2 - 1}} \qquad (4'')$$

Questa è dunque la formola che esprime la condizione d'incidenza dei raggi efficaci nel caso generale di un numero k, qualunque, di riflessioni interne.

Si vede subito che essendo.

$$(k+1)^2 - 1 = k^2 + 2\,K$$

il denominatore è almeno uguale a 3 non potendo k essere minore di *1*. Trattandosi di considerare il passaggio da un mezzo meno denso ad un mezzo più denso, n sarà maggiore di *1* perchè $r < 1$ e quindi $sen\, r < sen\, i$

Ma se può dirsi che $n > 1$, non è men vero che sarà sempre < 2 perchè $\frac{sen.\, i}{sen\, r} < 2$

Onde il numeratore di quella frazione posta sotto segno di radice, poichè $n^2 < 4$, sarà minore di *3*. Dunque:

$$n^2 - 1 < 3 \qquad (k+1)^2 - 1 > 3$$

Se il numeratore di quella frazione non può arrivare a 3 e il denominatore ha da esser sempre maggiore di *3*, necessariamente dovremo concludere che

$$\sqrt{\frac{n^2 - 1}{(k+1)^2 - 1}} < 1$$

Dunque il valore trovato per *cos.i* è sempre ammissibile ed esiste sempre per un colore determinato un valore, uno

solo, dell'angolo d'incidenza pel quale i raggi sono efficaci (1).

Si è veduto da quanto si è fatto in addietro che, la rotazione essendo il supplemento della deviazione, i massimi dell'una dovranno necessariamente corrispondere ai minimi dell'altra. Nel caso dei raggi efficaci la deviazione è un massimo, dunque la rotazione dovrà essere un minimo. Procuriamo di verificare analiticamente questa verità geometrica, e di vedere se veramente la rotazione dei raggi efficaci è un minimo.

Bisognerà conoscere il segno di:

$$\frac{d^2 \Delta}{di^2}$$

Ora si ha:

$$\frac{d\Delta}{di} = 2 - 2(k+1)\frac{dr}{di}$$

Faccio la derivata seconda

$$\frac{d^2\Delta}{d^2i} = -2(k+1)\frac{d^2r}{di^2}$$

Di qui si può subito concludere che il segno di $\frac{d^2\Delta}{di^2}$ è contrario a quello di $\frac{d^2r}{di^2}$

Or quale è il segno costante di $\frac{d^2r}{di^2}$?

Dalla

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$$

(1) Se $n < 1$, com'è il caso del passaggio da un mezzo più denso ad un mezzo meno denso, i, sarà immaginaria.

si ha

$$\frac{d^2r}{di^2} = \frac{-n^2 \cos^2 r \, sen\, i + n \, sen\, r \cos^2 i}{n^3 \cos^3 r},$$

formola che si ottiene osservando che

$$n^2 \, sen\, r \cos r \cos i = n \, sen\, r \cos^2 i \qquad (1)$$

Considerando la

$$n \, sen\, r = sen\, i,$$

poichè

$$n^2 (1 - \cos^2 r) = sen^2 i$$

si ha:

$$n^2 - n^2 \cos^2 r = sen^2 i.$$

E quindi:

$$\frac{d^2r}{di^2} = -\frac{(1 - n^2) \, sen\, i}{n^3 \cos^3 r}$$

Onde si vede che $\frac{d^2r}{di^2}$ è sempre negativo, e per conseguenza

$$\frac{d^2 \Delta}{di^2}$$

è sempre positivo.

Risulta quindi anche dall'analisi che la rotazione dei raggi efficaci è un minimo, qualunque sia il numero k delle ri-

(1) Ho detto che il secondo termine del numeratore della frazione

$$\frac{-n^2 \cos^2 r \, sen\, i + n \, sen\, r \cos^2 i}{n^3 \cos^3 r}$$

è uguale a $n^2 \, sen\, r \cos r \cos i$, termine che si otterrebbe naturalmente col calcolo moltiplicando però, ben inteso, nominatore e denominatore di tutta l'espressione per $n \cos r$. Ciò risulta chiaramente ricordando che $n \, sen\, r = sen\, i$.

flessioni. Si può determinare la posizione di un punto di e-mergenza di un raggio qualunque SI, relativamente al punto d'emergenza del raggio normale SA. (fig. 1, Tav. III).

Quest'ultimo dovrà cadere nella direzione del raggio stesso in A o in A'.

L'arco compreso fra l'incidenza e l'emergenza sarà e-spresso da

$$(k + 1)\pi$$

ove, s'intende, il raggio della goccia sferica sia uguale all'unità

Si vede che per SI l'arco compreso fra il piano d'incidenza e quello d'emergenza dopo K riflessioni sarà

$$= (k + 1)(\pi - 2r)$$

e quello compreso fra i due punti d'emergenza:

$$\delta = 2(k + 1)r - i$$

Per vedere se la distanza angolare δ di questi due emergenti, è suscettibile di un massimo o di un minimo applico le condizioni analitiche.

$$2(k + 1)\frac{dr}{di} - 1 = 0$$

e, siccome $\quad \frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r},$

avrò, quadrando,

$$4(k + 1)^2 \cos^2 i = n^2 \cos^2 r$$
$$n^2 \cos^2 r = n^2 (1 - \mathrm{sen}^2 r)$$
$$n^2 (1 - \mathrm{sen}^2 r) = n^2 - n^2 \mathrm{sen}^2 r,$$

ma $\quad n^2 \mathrm{sen}^2 r = \mathrm{sen}^2 i$

onde

$$n^2 \cos^2 r = n^2 - \mathrm{sen}^2 i$$
$$n^2 - \mathrm{sen}^2 i = n^2 - (1 - \cos^2 i)$$
$$n^2 - \mathrm{sen}^2 i = n^2 - 1 + \cos^2 i$$

Dunque: $4 (k + 1)^2 \cos^2 i = n^2 - 1 + \cos^2 i$

$$\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{4 (k + 1)^2 - 1}$$

Il valore così trovato per $\cos i$ è sempre piccolissimo, poichè nel caso di una sola riflessione

$$\cos. i = \sqrt{\frac{7}{135}}$$

e diminuirà aumentando K.

Oltracciò, come si ha

$$\frac{d^2 \Delta}{di^2} = 2 (k + 1) \frac{d^2 r}{di^2}$$

e che

$$\frac{d^2 r}{di^2}$$

è sempre negativo, il valore ottenuto per l'angolo d'incidenza corrisponde ognora a un massimo di δ.

δ aumenta con l'angolo d'incidenza, e raggiunge un certo massimo che ha luogo quando l'angolo d'incidenza s'avvicina a 90°, ed SI si approssima al raggio tangente alla goccia acquea.

Dopo quanto si è detto finora, concludendo, potremo considerare l'insieme dei raggi che occupano la superficie esteriore d'un cilindro luminoso incidente SI, SL (1), e seguirne la trasformazione che subisce, dopo un numero qualunque di riflessioni, in un cono RR' di cui si calcola l'apertura $RA'R'$, sostituendo nella

$$RA'R' = \pi + 2i - 4r$$

(1) Fig. 2, Tav. III. — SI, SL sono le generatrici giacenti nel piano del disegno, il qual piano, secondo ho stabilito, ne fa una sezione longitudinale passante per l'asse, che è il raggio normale SA.

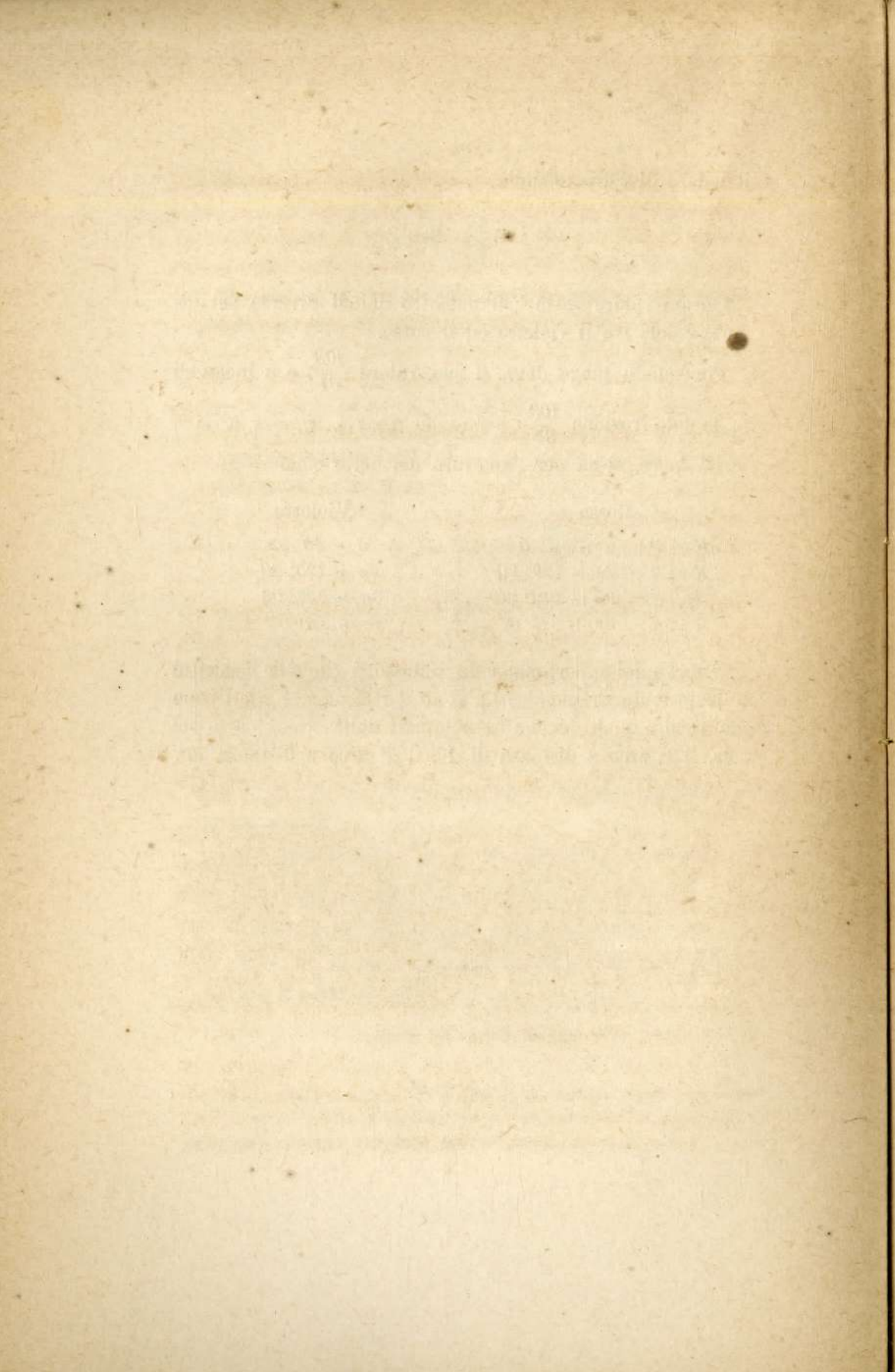
il valore di i tratto dalla

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{K^2 + 2K}}$$

Questo valore varia coll'indice: è quindi diverso pei diversi colori fra il violetto ed il rosso.

Ponendo a luogo di n_v il suo valore $\frac{108}{81}$, e a luogo di n_r la nota frazione $\frac{109}{81}$, e facendo $K = 1$, $K = 2$, $K = 3$, $K = 4$, ecc., si ha per l'apertura del detto cono

	Rosso	Violetto
$K = 1$	$\pi + 42°\ 10$	$\pi + 40°\ 22$
$K = 2$	$2\pi + 129°\ 20$	$2\pi + 125°\ 40$
$K = 3$	$3\pi + 231°\ 40$	$3\pi + 227°\ 08$
$K = 4$	$4\pi + 317°\ 07$	$4\pi + 310°\ 07$

Osserva qui opportunamente il Mossotti che alle incidenze e deviazioni corrispondenti a $K = 3$ e $K = 4$ si riferiscono già archi, i quali devono esser situati dalla stessa parte del sole, il 3° arco a distanza di 40, il 4° arco a distanza 46°.

Descrizione Complementare.

§ 1.

Teoria di Young. — Quando l'iride è molto brillante vicino al violetto dell'arco interno, e talvolta anche a quello dell'arco esterno, appaiono due o tre archi formati ciascuno da una fascia purpurea e da un'altra verdastra. Questi sono gli archi *soprannumerarî* o *supplementari*.

La descrizione più esatta ch'io ne conosca è quella del Langwith (1). Credo opportuno di riferirne qui il brano più importante.

“ Il 21 di agosto 1792 verso le 5 e mezzo pom. si osservarono le seguenti apparenze. I colori dell'arco primario erano come al solito, soltanto il violetto inclinava al rosso e il suo contorno non era ben definito: al disotto di esso vi era un arco di color verde la cui parte superiore inclinava ad un giallo vivo e l'inferiore ad un verde fosco: al disotto di questo si vedevano alternativamente due archi di un rosso di porpora e due di verde.

“ Al disotto di tutto scorgevasi una debole apparenza di un altro arco purpureo il quale svaniva e tornava più volte

(1) *Transazioni Filosofiche.* — Vol. XXXII.

con tal frequenza, che non potevamo fissare i nostri occhi su di esso. L'ordine dei colori era dunque: arco I, rosso aranciato, giallo, verde, indaco, azzurro, porpora; II verde chiaro, verde scuro, porpora; III verde, porpora; IV verde, porpora debole evanescente. Noi avevamo così quattro ordini di colori e forse il principio del V: perchè non pongo dubbio che quello che io chiamo porpora non fosse piuttosto un misto di violetto della serie precedente col rosso della seguente, e che il verde nascesse da una mistura di colori intermedî. Due cose vi hanno che meritano nota: 1° la lunghezza della prima serie di colori che eccedeva di gran lunga ogni altra; 2° gli ordini inferiori dei colori nelle parti più basse dell'iride quantunque esse fossero bene spesso incomparabilmente più vivide delle parti più elevate sotto le quali i colori apparivano. „

Dacval e Boscowich si sono occupati di questo importante fenomeno (1). Il primo che abbia cercato di spiegarlo per mezzo delle interferenze dei raggi riflessi pare sia il Paberton (2). Quest'ultimo però ha solo considerato i raggi sparpagliati dalla riflessione irregolare.

Il dott. Young con una sua memoria pubblicata nel principio del secolo ha ridotto a compimento questa spiegazione facendo notare (3) che, oltre i raggi corrispondenti alla deviazione massima che formano l'iride primaria, escono dalle goccie altri raggi paralleli con deviazione minore, i quali, benchè vadano diminuendo di intensità, sono atti colle loro interferenze a produrre i detti archi. Questi raggi devono essere molto vicini ai raggi efficaci.

Si consideri la fig. 1ª della Tav. IV. Sia SI un raggio efficace per il quale la rotazione è 141°. Per i raggi compresi fra questo e il raggio normale SAA' la rotazione va aumen-

(1) Mossotti, Op. cit. — Sez. XLI.

(2) *Transazioni filosofiche.* — Vol. XXXIII.

(3) Young. — *Memoria letta alla Società Reale,* il 24 novembre 1803, inserta nelle *Transazioni filosofiche.*

tando da 141° fino a 180°. La rotazione cresce ugualmente per gli incidenti fra *SI* ed *SK* man mano che si avvicinano a *K*. Per *SK* è

$$\Delta = 2\pi - 4r$$

sendo r l'angolo di refrazione corrispondente ad un incidenza di $\frac{\pi}{2}$. Per l'acqua quest'angolo di refrazione è 48° 35' ciò che dà per la rotazione di *SK*

$$\Delta = 165^\circ\ 40'.$$

Risulta da tutti questi criterî che ciascun raggio fra *SI* e *SK* corrisponde ad un altro raggio fra *SI* ed *SA* che subisce la medesima rotazione.

Si capisce subito che questi raggi *SP*, *SC*, che emergonó paralleli devono riflettersi nell'interno al medesimo punto *d*.

La deviazione dei raggi efficaci essendo un massimo nel caso di una riflessione, quella dei raggi che emergono parallelamente deve essere inferiore alla loro e, come questi dan luogo ad un massimo o ad un minimo di luce secondo che le loro differenze di cammino sono uguali ad un numero pari o impari di mezze lunghezze d'onda, deve prodursi nella parte interiore del primo arcobaleno una serie di massimi e di minimi alternati per ciascun colore semplice e per conseguenza una successione di fascie colorate.

I raggi paralleli nei quali la deviazione differisce di poco da quella dei raggi efficaci offrono una differenza piccola perchè le fascie dovute alla loro interferenza riescano distinte; anche gli archi supplementari non sono visibili che nella vicinanza dell'arco principale.

Una fascia di un ordine determinato corrisponde sempre alla medesima differenza di cammino dei raggi che emergono paralleli; e questa differenza per una medesima deviazione è tanto più grande quanto più è grande il diametro

della goccia. E come la goccia aumenta di grandezza cadendo, così le fascie vanno allontanandosi negli archi supplementari man mano che s'avvicina la parte culminante degli archi.

Per mezzo di uno spruzzo d'acqua si possono ottenere molto distinti gli archi supplementari artificialmente, e molto meglio che in natura ove quasi sempre la suddivisione delle goccie è troppo grande per potere offerire al nostro occhio delle fascie sensibili. Io ne ho contate 7 al disotto del 1° arco e 3 al di sopra del 2°; altri è riuscito a contarne fino a 16 da una parte e ad 8 dalla parte superiore dell'arcobaleno (1).

Il Langwith, nella descrizione riferita, fa notare come il rosso del 1° arco soprannumerario si confonda o succeda al violetto dell'arco ordinario. La deviazione dei raggi rossi di quest'ultimo essendo di 42° 02′ e di circa 2° la larghezza di tutta la fascia, potrò assumere 40° 02′ per deviazione di raggi rossi del primo arco supplementare. La larghezza dei quattro archi supplementari presi assieme era, secondo la stessa descrizione sintetica e sperimentale del Langwith, uguale all'incirca alla larghezza dell'arco ordinario. Si può prendere quindi 38° 02′, vale a dire due gradi di meno, per la deviazione dei raggi del 4° arco supplementario.

Se nelle formule

$$sen\ i = n\ sen\ r$$

$$\frac{K+1}{2}(\pi + 2r) + i = \pi \pm \frac{D}{2},$$

si danno ad i dei valori differenti da 59° 23′, angolo che corrisponde all'incidenza sulle goccie d'acqua dei raggi rossi dell'arco ordinario, si trova che, tanto aumentando il valore di quest'angolo i, quanto diminuendolo, quello della deviazione D diminuisce sempre, talchè la $D = 42° 02′$ cor-

(1) *Comptes rendus hebdomadaire des séances de l'Academie des Sciences. IV, 638.* — Esperienza di Babinet.

rispondente al rosso dell'arco ordinario è la massima deviazione possibile. Trascrivo i valori di i, corrispondenti alle deviazioni 40° 02', trovati per tentativi dal Mossotti e registrati dal Billet.

$i_1 = 49° 23'$	$r_1 = 34° 42'$	$D_1 = 40° 02'$
$i'_1 = 68° 17'$	$r'_1 = 44° 10'$	
$i_2 = 44° 50'$	$r_2 = 31° 56'$	
$i'_2 = 72° 01'$	$r'_2 = 45° 31'$	$D_2 = 38° 02'$

Ognuno intende che i raggi uscenti dalla goccia con deviazione di 38° 02' e formanti il quarto arco supplementare cadono con incidenza uguale ai due ultimi valori di i; mentre i raggi rossi, che escono paralleli con deviazione di 40° 02' e contribuiscono alla formazione del primo arco supplementare, sono quelli che arrivano alla goccia coll'incidenza dei due primi valori di i.

Questi due ultimi sistemi di raggi si possono rinforzare o distruggere per interferenza secondo il diametro delle goccie. Lo stesso dicasi dei sistemi di raggi corrispondenti ai due valori i_2 i_2'.

Si è detto in addietro, col Verdet, che una fascia di un ordine determinato corrisponde sempre alla medesima differenza di cammino dei raggi che emergono paralleli; e che questa differenza per una medesima deviazione è tanto più grande quanto più è grande il diametro della goccia. Si è notato altresì come coll'esperienza, per mezzo di spruzzi artificiali determinando una suddivisione di particelle acquee non tanto grande, si possono ottenere degli archi supplementari molto distinti e in gran numero.

Sarà forse necessario, a voler dare una compiuta descrizione analitica del fenomeno (almeno nelle sue più notevoli particolarità), di esaminare anche teoricamente le dimensioni delle goccie e di venire a qualche cosa di determinato in proposito colla opportuna applicazione dei simboli e criterî matematici, ciò che in questo caso ha trascurato il Verdet.

Siano (fig. 1, Tav. IV) SC, SP i due raggi paralleli l'uno con incidenza minore di 59° 23′, l'altro con incidenza maggiore, ma tali che dopo aver traversato la goccia ed essere stati riflessi in d, escono in direzione parallela ET, $E'T'$. Si considerino le perpendicolari Oq Oq_1 su SD, SD' prolungamenti dei raggi incidenti, e le perpendicolari OP, OP' sulla direzione dei raggi rifratti: Coq, Poq^1 saranno complementare degli incidenti i ed i'; Coq Poq' saranno i complementari di r ed r'. Il cammino percorso da SC per arrivare a d sarà $Cd = 2 \cos r$; altrettanto per arrivare a C', onde si avrà $4 \cos r$, che esprime tutto il cammino interno del raggio SC. Così medesimamente per SP avremo $4 \cos r^1$. Ma questo raggio è penetrato nella goccia dopo percorsa mp: da che SC fu deviato ed, uscito, non ha riacquistato il parallelismo collo stesso raggio se non dopo corso all'esterno. $P'n = Pm$.

Se si pensa che

$$Pm = P'n = qC - q'P$$

e che

$$qC = \cos i \qquad q'P = \cos i'$$

il cammino di $S'\,P\,d\,P\,P''$ dopo ritornato con la stessa direzione di $C'C''$, sarà composto di una parte $4 \cos r'$ e di un'altra parte $2 (\cos i - \cos i')$.

Le vie percorse nell'interno della goccia da raggi con velocità diverse da quelle nell'aria, potranno esser ridotte corrispondenti ad un egual numero di periodi di fasi moltiplicando per n, indice di rifrazione dell'acqua. Il cammino del primo incidente SP corrisponderà a $4\,n \cos r$ e quello di SC a

$$4\,n \cos r' + 2\,(\cos i - \cos i').$$

Se il raggio della goccia è uguale a d avremo poi due viaggi:

$$4\,.\,d\,.\,n\,.\cos r \quad 4\,d\,.\,n\,.\cos r' + 2\,d\,(\cos i - \cos i')$$

e per la loro differenza:

$$2\,d\,\{\,2\,n\,(\cos r' - \cos r) + \cos i - \cos i'\,\}$$

Ponendo in questa formola per i, i' i valori necessari perchè $D_1 = 40^\circ\,02'$, e per r, r' lo stesso, e per d il raggio che avevan le goccie nell'osservazione di Langwith, questa differenza di cammino dovrà esser tale che i raggi vengano a trovarsi nelle condizioni in cui producono il primo anello rosso: la qual differenza è, secondo Newton (1), di 9 milionesimi di pollici inglesi, il che equivale a 228,6 milionesimi di millimetro. Si avrà:

$$2\,d\,\{\,2\,n\,(\cos r'_1 - \cos r_1) + \cos i_1 - \cos i'_1\,\} = 228{,}6.$$

Ora è chiaro che, se sostituiamo qui ad $i\,i', r\,r'$ i valori corrispondenti alle altre deviazioni, avremo una serie di formule, le quali dovrebbero dare lo stesso valore per $2\,d$, qualora il fenomeno succedesse veramente come è spiegato.

Poniamo per $i\,i'$, $r\,r'$ i valori corrispondenti alla

$$D_2 = 38^\circ\,02'.$$

La differenza di cammino deve essere quella che negli anelli colorati di Newton può riferirsi al quarto anello rosso, che è 40,5 milionesimi di pollice, pari a 1028,7 milionesimi di millimetri. Avremo:

$$2\,d\,\{\,2\,n\,(\cos r'_2 - \cos r_2) + \cos i_2 - \cos i'_2\,\} = 1028{,}7.$$

E in virtù dei valori di i e di r sostituiti nella prima formola si otterrà:

$$2\,d = 0{,}3387$$

e per quelli sostituiti nella seconda

$$2\,d = 0{,}3535.$$

(1) Newton — *Optices* — lib. II. Observ. 16.

Questo mi pare uno dei risultati più belli e più soddisfacenti della teoria, poichè a nessuno sfugge la mirabile prossimità di quei due valori di $2d$, ottenuti con numeri e con un processo aritmetico tanto diverso; tanto diverso, s'intende, rispetto alle quantità.

Si osserva inoltre che il valore medio fra i due d

$$2\,d = 0{,}3461$$

è molto vicino a quello accennato da Young; ciò che può dirsi un vero trionfo della speculazione scientifica dei moderni, sottile, ma non mai astratta, e pur sempre sostenuta dall'osservazione o convalidata dalla più scrupolosa e vigile esperienza.

§ 2.

Integrale di Airy. — Airy ha considerato le onde relative ai raggi emergenti.

Supposto il caso del primo arco vediamo che succeda nel piano condotto per $S\,A$. I raggi emergenti che provengono dagli incidenti compresi fra $S\,A$ e il raggio efficace $S\,I$ formano un ramo $A\,M\,N$ di curva caustica assintota al prolungamento $L'\,P$ del raggio emergente efficace $I'\,I''$. $S\,A$ è tangente a questo ramo di curva in A. I raggi emergenti provenienti dagli incidenti fra $S\,I$ e il fascio tangente generano un secondo ramo di curva caustica $A\;M'\;N'$, assintoto $I'\,I''$ e tangente in F al raggio emergente di cui il punto di emergenza è a distanza da A, raggio che corrisponderebbe ad un raggio incidente vicinissimo al raggio tangente.

La sezione d'onda emergente nel piano della figura è una sviluppante della caustica, normale in O, dove incontra il prolungamento del raggio emergente efficace. Quivi il suo raggio di curvatura diventa ∞ ed avremo un punto di flesso.

Si consideri la fig. 3. Sia $R\,o\,r$ la forma della sezione dell'onda emergente, si prenda O per origine delle coordinate, per asse delle X il raggio emergente efficace, delle Y una perpendicolare a questo. Considerato che la curva presenta all'origine un punto di flesso, si deve avere:

$$y = o \qquad \frac{dy}{dx} = o \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = o.$$

Onde, considerata la curva nelle vicinanze di O, la sua equazione si potrà mettere sotto la forma:

$$y = D x^3 \text{ ovvero } y = -\frac{x^3}{3\,a^2} \text{ ove } D = -\frac{1}{3\,a^2}$$

Si tratta di cercare l'intensità luminosa in un punto M del piano vicinissimo all'asse delle Y: la retta che unisce questo punto ad O farà un angolo piccolissimo con la direzione dell'emergente efficace. Chiamo q l'ordinata di M, p l'ascissa; $\frac{p}{q}$ sarà piccolissimo.

Collo stesso criterio col quale abbiamo sostituito ad una onda sferica un'onda circolare, ad una superficie una linea, possiamo provare che l'intensità luminosa prodotta dall'onda emergente nel punto M è paragonabile a quella inviata nello stesso tempo dall'onda lineare $R\,o\,r$.

Calcoliamo questa intensità. Sia R un punto vicinissimo ad o. Facciasi $o\,R = R \quad RM = \delta \quad sen\,2\pi \frac{t}{T} = v$, velocità inviata in M.

Si può trascurare le velocità inviate dai punti vicini.

Allora l'integrale rappresentante la velocità totale inviata dall'onda lineare può prendersi fra $-\infty$ e $+\infty$. È poi a osservarsi che la curva, essendo tangente ad X in un punto di esso, nelle vicinanze di o si allontanerà di poco da quest'asse; onde sarà lecito di porre $d\,x$ a luogo di $d\,s$.

Avremo adunque:

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} sen\, 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{\delta}{\lambda} \right) dx$$

Essendo x e y le coordinate di R, e ponendo ad y il suo valore tolto dalla espressione della curva il Verdet (1) ottiene:

$$\delta = f - \frac{p}{q} x' + \frac{x'^3}{3a^2}$$

(1) Ecco le trasformazioni eseguite dal Verdet:

$$\delta = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2px + p^2 + q^2 + y^2 + \frac{2qx^3}{3a^2} + \frac{x^6}{9a^4}}$$

trascurando x^6 e ponendo $p^2 + q^2 = c^2$

$$\delta = c \left(1 - \frac{2px}{c^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{2qx^3}{3a^2c^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$c \left(1 - \frac{px}{c^2} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{qx^3}{3a^2c^2} - \frac{p^2x^2}{2c^4} + \frac{px^3}{2c^4} - \frac{p^3c^3}{2c^6} \right)$$

$$\delta = q + \frac{p^2}{2q} - \frac{px}{q} + \frac{x^2}{2q} + \left(\frac{p}{2q^3} - \frac{1}{3a^2} \right) x^3$$

poichè p può trascurarsi davanti a q e a c. Può sopprimersi $\frac{p}{2q^2}$

$$\delta = q + \frac{p^2}{2q} - \frac{px}{q} + \frac{2^2}{2q} + \frac{x^3}{3a^2}$$

Si prenda $x = x' - \frac{a^2}{2y}$, si ha

$$\delta = f - \frac{(4pq + a^2)\, x'}{4q^2} + \frac{x'^3}{3a^2}$$

chiamando f l'insieme dei termini indipendenti da x', che è la nuova variabile introdotta per fare sparire il termine in x^2. Siccome poi a^2 è trascurabile di fronte a $4pq$, così

$$\delta = f - \frac{p}{q} x' + \frac{x'^3}{3a^2}$$

Onde

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} sen\ 2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{f}{\lambda} - \frac{1}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q}x'\right) \right\} dx'$$

e l'intensità della luce in M sarà misurata da

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} cos\ \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q}x'\right) dx'\right]^2$$
$$+ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} sen\ \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q}x'\right) dx'\right]^2.$$

Quest'ultimo integrale ha un valor nullo; il primo ha un valore due volte maggiore che se fosse preso fra o e ∞ L'intensità in M potrà rappresentarsi da

$$4\left[\int_{0}^{\infty} cos\ \frac{2\pi}{3a^2\lambda}\left(x'^3 - \frac{3a^2p}{q}x'\right) dx'\right]^2$$

facciamo

$$\frac{2\pi}{3a^2\lambda}x'^3 = \frac{\pi}{2}\theta^3$$

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{4x'^3}{3a^2\lambda}}$$

facciamo ancora

$$m = \frac{4}{\lambda}\ \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{\frac{3a^2\lambda}{4}}$$

Onde l'integrale prende la forma

$$\int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (\omega^3 - m\,\omega)\, d\,\omega$$

che è quella data da Airy.

Il quadrato di quest'integrale è proporzionale all'intensità cercata, che dipenderà quindi anch'essa dal parametro m.

Quest'ultimo, poi, si vede che è proporzionale alla tangente dell'angolo fatto da OM colla direzione dei raggi efficaci rappresentata dall'asse delle Y essendo proporzionale a $\frac{p}{q}$.

Airy ha diviso l'intervallo fra i due limiti dell' integrale in un numero di intervalli piccolissimi; ed ha calcolato i valori che prende allorchè si danno ad m valori positivi o negativi varianti per decimi a partire da zero. Variando il limite superiore dopo un valore un po' grande simile ad ∞, Airy ritiene che il valore dell'integrale si mantenga sensibilmente lo stesso, come si fa per gli integrali di Fresnel.

Se si da ad m valori negativi, l'integrale diminuisce man mano che il valore assoluto di m cresce. Così Airy ha pure trovato che, se si dà ad m valori positivi crescenti l'integrale cresce, *raggiunge massimi e minimi, il primo massimo avendo un valore molto più grande degli altri.*

Ora: egli è evidente che, dire essere m negativo è lo stesso come dir negativo $\frac{p}{q}$, e come porre il punto M dalla parte delle x negative al disotto della direzione dei raggi efficaci rappresentata da Y. La deviazione sarà più grande che non è quella dei raggi efficaci. In questo caso si è detto che secondo il calcolo di Airy, l'intensità decresce rapidamente.

Egli è chiaro anche m positivo significare una deviazione minore di quella dei raggi efficaci: e se con $\frac{p}{q}$ positivo e

crescente ha trovato Airy per il valore corrispondente dell'intensità *una serie di massimi e di minimi*, non vi ha dubbio alcuno che questi massimi e minimi di intensità luminosa trovati colla teoria devono corrispondere nè più nè meno che agli archi supplementari, eccettuato il primo massimo che corrisponderà all'arco principale.

Se poi $m = o$, dovendo $\frac{p}{q}$ essere $= o$, P sarà nullo e il punto M, in cui si considera l'intensità luminosa, si troverà sulla direzione dei raggi efficaci. Ma si è veduto che il primo massimo somministrato dall'integrale di Airy ha luogo quando $\frac{p}{q}$ è positivo e diverso da zero; quindi è forza ammettere che nella direzione dei raggi efficaci non si ha propriamente un massimo d'intensità, e dovremo subito concludere che la deviazione del primo arcobaleno non è uguale a quella dei raggi efficaci, ma un po' più piccola.

I valori di m, pei quali l'intensità è massima, dipendono dai valori di $\frac{p}{q}$, cioè dalle distanze angolari dei diversi archi supplementari a partire dai raggi efficaci. A cagione di quel certo coefficiente di $\frac{p}{q}$, ond'è necessario moltiplicare questo rapporto per ottenere il parametro m, (1) la deviazione non si potrà più valutare esattamente e non si potranno ottenere che i rapporti delle distanze angolari, rapporti indipendenti da $2d$. I valori assoluti di queste distanze dall'arco efficace variano invece al variare della dimensione delle goccie. Infatti il valore di $\frac{p}{q}$, come nota opportunamente il Verdet, per un'arco supplementare determinato è

$$\frac{4}{\lambda}\sqrt[3]{\frac{3\,a^2\,1}{4}}\ .$$

(1) *V. pagg. prec.*

di tanto più piccolo quanto a è più grande. Or il parametro a non può dipendere da altro che dal raggio della goccia (1) dunque per lo stesso massimo il $\frac{p}{q}$ è tanto minore quanto più grande sono le goccie liquide.

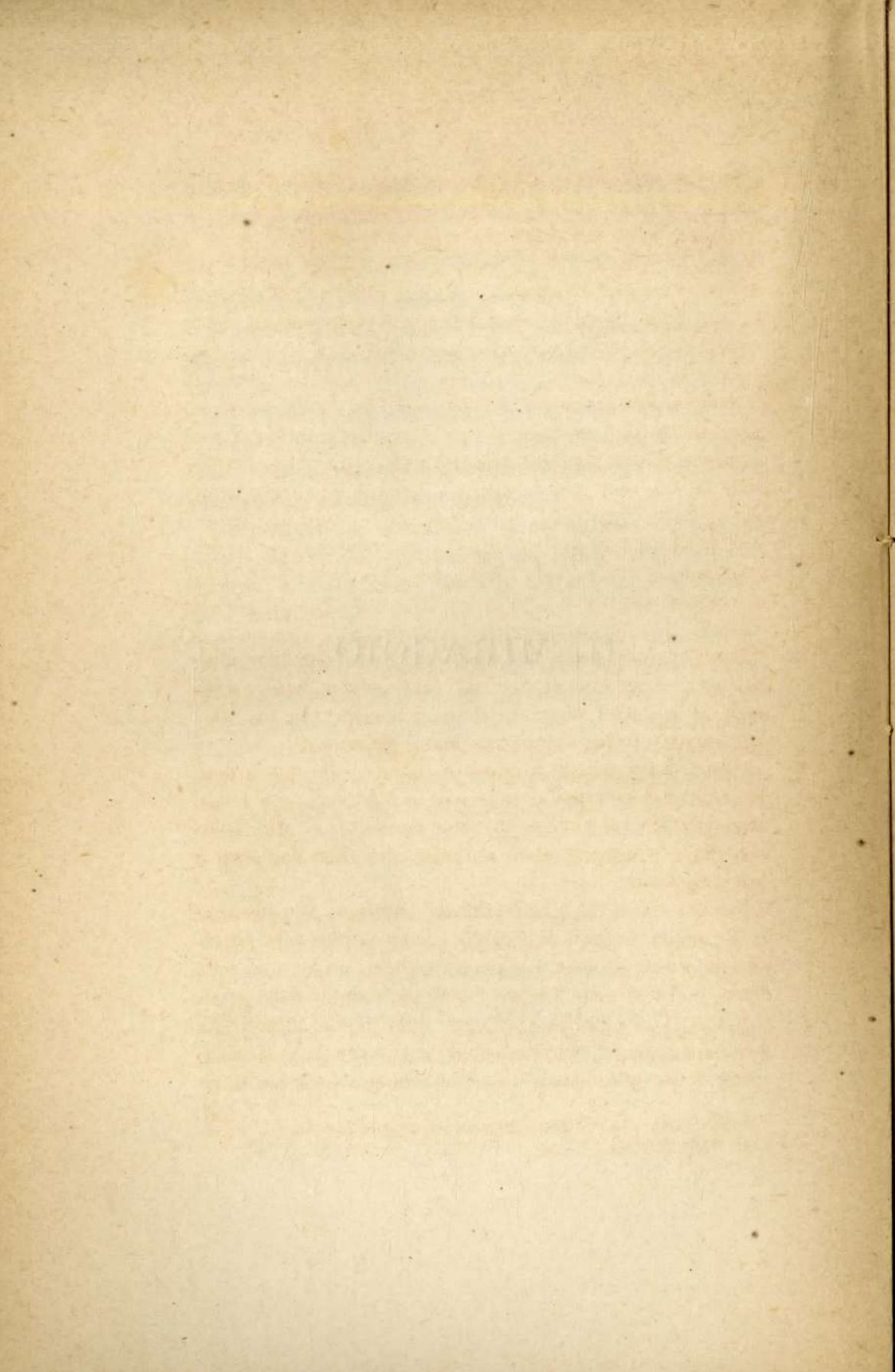
Il caso di più riflessioni si tratta analogamente; e si trova che la deviazione del secondo arcobaleno è sempre un po' maggiore che non la dia la teoria di Cartesio e di Newton e che è tanto maggiore quanto più le goccie sono minute. Sotto il secondo arcobaleno l'intensità decresce rapidamente; sopra, passa per una serie di massimi e di minimi dando luogo ad archi soprannumerari.

L'esperienza ha convalidato la spiegazione analitica di Airy, e le ricerche sperimentali del Miller tendono mirabilmente a confermare i risultati del calcolo e le conclusioni della teoria.

Ond'è che vediamo la teoria e l'esperienza procedere di pari passo nella investigazione dei fenomeni della natura: l'esperienza constata e misura gli elementi e le condizioni di un fenomeno, la matematica prende ad esprimerle sotto forme generali a fine di rintracciarne le leggi nascoste e di scoprire dietro il mondo della materia il mondo astratto e rigoroso delle cifre e della razionalità.

(1) Basta ricordare che per due goccie di raggi diversi le sezioni meridiane dell'onda emergente devono essere simili e aver per rapporto di simiglianza il rapporto dei raggi: donde viene che prendendo per origine i punti dove le due curve incontrano il raggio efficace e chiamando r r' i raggi delle due goccie a a' i valori del parametro per le due curve, xy, $x'y'$ le coordinate di due punti analoghi delle due curve si ha:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{r}{r'} \quad y=-\frac{x^3}{3a^2} \quad y'=-\frac{x'^3}{3a'^2} \quad \frac{a}{a'}=\frac{r}{r'}, \quad c. v.$$

IL MIRAGGIO

Parte Descrittiva.

§ 1.

Il miraggio consiste nell'apparizione di un'immagine simmetrica e rovesciata di oggetti situati sulla superficie della terra, onde l'osservatore è indotto a credere che fra esso e gli oggetti veduti trovisi una massa di acqua.

Questa sorprendente illusione è comune alle popolazioni nomadi dell'Africa, dell'Arabia e della Mongolia; e le forme svariate sotto cui si presenta sminuzzandosi in altri fenomeni affini e bizzarri, sono utilmente descritte dai poeti e dai viaggiatori.

Narrasi che il 26 luglio 1798 da Hastings, alla distanza di 50 miglia, le rupi di Francia furono vedute così distintamente come se fossero state tanto vicino da toccarsi colla mano, e si dice che Dieppe sia stata veduta dopo mezzogiorno (1). In Egitto i villaggi snlle piccole alture, che dominano il piano, sembrano fabbricati sopra isole in mezzo ad un lago, allorquando il suolo sabbioso ed arido è ri-

(1) M. Somerville. — *Della connessione delle scienze fisiche.* — Sez. XVIII. Ediz. Barbera, p. 125.

scaldato dal sole di mezzodì (1). Talvolta i monti appaiono più alti di quello che sono. Un viaggiatore inglese stando sui piani dell'Indostan vide tutta la catena superiore delle montagne dell'Himalaya innalzarsi ad un tratto davanti ai suoi occhi per un improvviso mutamento atmosferico prodotto da una copiosa pioggia dopo un lunghissimo corso di stagione calda e asciutta (2). Durante l'inverno dell'anno 1820 che Edoardo Parry con le sue genti passò all'isola di Melville, nel 74° 47′ di latitudine boreale, il sole non sorse per 92 giorni e comparve sopra l'orizzonte nel 3 di febbraio, cioè tre giorni innanzi del tempo in cui dovrebbe apparire regolarmente. Dicesi che Barentz abbia visto il sole nella Nuova Zembla, nel 20 gennaio 1557, quindici giorni prima del tempo in cui la sua apparizione era aspettata (3). Nel 1818 il capitano Scoresby, le cui osservazioni sui fenomeni dei mari polari sono tanto pregevoli, riconobbe il vascello di suo padre dall'immagine rovesciata nell'aria, sebbene il vascello stesso fosse sotto l'orizzonte a 30 miglia di distanza dal punto di osservazione (4).

Il sole e la luna sovente si mostrano in forma bistorta al loro levarsi e al tramonto durante certi mutamenti repentini della densità atmosferica. Gli oggetti veggonsi talora capovolti, e talora dello stesso oggetto appaiono tre immagini, due diritte ed una capovolta. Tale è specialmente il caso nelle alte latitudini dove il mar glaciale raffredda lo strato di aria che posa sopra di esso (5). Il dott. Buchan mentre stava osservando il sole dalla rupe, circa un miglio all'est di Brighton, nell'istante che il disco emergeva

(1) M. Somerville. — *Geografia fisica.* — Vol. I, c. XXIV; edizione Barbera. pag. 484.

(2) Id. — *Della connessione delle Scienze fisiche.* — Edizione citata, pag. 192

(3) F Müller. — *De reizen der Nederlanders naar de Nordpool.* Harlem, 77. (Mittheil der Petermann, 1877, I, 23-28).

(4) Id. — *Loc. cit.* — L. F. Kamtz, *Prelez. di Meteorologia,* Sez. VII.

(5) Mittheilungen, 1877, III, 85-92.

dalla superficie dell'oceano, vide la rupe sulla quale egli si ritrovava, un mulino a vento, la propria immagine e quella di un'amico, dipinta immediatamente in faccia a sè sul mare. Questa apparenza durò circa 10 minuti, finchè il sole si fu levato quasi quanto il suo proprio diametro sopra la superficie delle onde. Il tutto sembrò allora innalzarsi nell'aria e successivamente svanire. I raggi del sole cadevano sulla rupe con un'incidenza di 73°; ed il mare era coperto da una densa nebbia che man mano ritiravasi davanti al sole nascente (1).

Accade alcuna volta che l'immagine invece di apparir sollevata nell'atmosfera o trasportata dinanzi a sè stessa, come nella maggior parte dei casi citati, appaia come riflessa lateralmente. Soret e Jurine ne videro un caso notevole sul lago di Ginevra, presso la costa di Belle-Rive. Essi si trovavano al secondo piano di una casa posta sulla riva e con un canocchiale guardavano una barca alla distanza di circa 8 chilometri e che dirigevasi verso di loro, quando tutto ad un tratto poterono distinguere alla luce del sole ed anche senza l'aiuto del telescopio una immagine riflessa lateralmente della barca medesima e moventesi allo stesso modo sulla superficie del lago (2).

Invece potremo assegnare alla categoria dei miraggi di sollevamento l'apparenza descritta dal capitano Mundy nel suo viaggio alle Indie: " Una valle profonda e precipitosa sotto di noi, nel fondo della quale io aveva veduto uno o due poveri villaggi sul mattino, presero alla sera una rassomiglianza perfetta ad un bel lago; il vapore ascendendo rappresentava la parte quasi a mezz'altezza dai lati della valle, e nella luminosa superficie di esse alberi e rupi distintamente si disegnavano. Io non era da molto tempo in contemplazione di questo fenomeno, quando un'improvvisa

(1) M. Somerville. — *D. Conn. d. Sc. f.*, loc. cit.
(2) C. Despretz. — *Traitè de Phisique*, § 539. — G. Milani, *Meteorologia*, VIII, pag 202.

burrasca sopravvenne e dispiegò una cortina di nubi sopra la scena „ (1).

In Italia questo fenomeno è conosciuto sotto il nome di Fata Morgana, che Ariosto immaginava sorella della Fata Alcina (2) e Varano descrisse nelle sue *Visioni* (3)

Ecco ridotta alla nudità di fatto, la descrizione del Varano: “ Vidi il mare della costa di Sicilia prendere apparenza di una catena di montagne oscure, mentre le acque dal lato della Calabria rimasero perfettamente unite. Al disopra di queste vedevansi dipinte a chiaro-scuro una serie di parecchie migliaia di pilastri, tutti eguali in altezza, in distanza relativa e in toni di luce ed ombra. In un batter d'occhio quei pilastri perdettero la metà della loro altezza e parvero piegarsi a foggia di archi e di volte come gli acquedotti dei Romani. Fu veduto in seguito formarsi sulla cima un lungo cornicione ed apparve un gran numero di castelli, tutti perfettamente simili. Poco dopo questi castelli si trasformarono formando delle torri le quali scomparvero anch'esse per non lasciare scorgere che una colonnata, poi delle finestre, e finalmente dei pini e dei cipressi ripetuti del pari un gran numero di volte „ (4).

Da tuttociò risulta che la “ Fata Morgana „ degli italiani nel significato che le si suol dare, corrisponde piuttosto ad un complesso di miraggi che ad un semplice miraggio laterale o di sollevamento: a differenza di tutti quelli citati in addietro e conformemente a questo notevolissimo descritto dal noto capitano Scoresby: “ Il 19 giugno 1822 il sole era caldissimo, e la costa apparve all'improvviso più vicina a noi di 25 a 35 chilometri; le

(1) Cap. Mundy. — *Giornale del viaggio nell'India*, (Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik„ Monaco, 1879).

(2) Ariosto. — *Orlando Furioso*, C. VI, 38.

(3) Varano — *Visioni*.

(4) Ho modificato leggermente la descrizione del Varano col confronto di altre relazioni dovute parimenti a testimoni oculari.

diverse alture erano talmente rialzate che dal ponte del bastimento si potevano scorgere come stando in cima all'albero. Il ghiaccio all'orizzonte prendeva forme singolari: grossi massi di esso rassomigliavano a colonne; campi di ghiaccio parevano una catena di rupi prismatiche; in molti punti il ghiaccio comparve nell'aria a grande altezza sopra l'orizzonte. Le navi poste in vicinanza avevano gli aspetti i più bizzarri e al disopra delle navi lontane scorgevasi la loro immagine rovesciata e ingrandita; in alcuni casi trovavasi a grande elevazione, ma allora era sempre più piccola dell'originale. Per alcuni minuti fu veduta persino l'immagine di un bastimento il quale era al disotto dell'orizzonte. Sopra una delle navi si videro due immagini, una diritta, l'altra rovesciata „ (1).

A questi si associano altri fenomeni ed illusioni alle quali siamo soggetti, giudicando sempre dalla posizione dei corpi senza aver riguardo alla strada che hanno percorsa i raggi luminosi dei corpi stessi per giungere al nostro occhio. Il bastone nell'acqua ci sembra rotto e piegato ad angolo col pezzo che è fuori dell'acqua; gli oggetti al fondo di un recipiente sembrano innalzarsi coprendoli con un liquido. Tali apparenze che trovansi spesso complicate con fenomeni di miraggio e che non si possono esplicare ricorrendo alla nozione di un solo raggio di luce, ma sì bene a quella di un fascetto luminoso cilindrico avente per diametro il diametro dell'iride del nostro occhio, debbono andare affatto distinte dal caso nostro. Quelle sono un'effetto della deviazione dei raggi luminosi allorchè passano da un mezzo ad un'altro mezzo di densità diversa; questo invece riguarda un'altro ordine di fatti: quando cioè il raggio di luce invece di andar oltre spezzandosi torna indietro per riflessione. Una riflessione parziale esiste in natura nel propagarsi della

(1) L. Schwarka 's Schlitten. — *Expedition nac King William land.* (Deutsche Rundschau für Geographie, und Statistik, Monaco, 1881 fasc. V).

luce da un mezzo ad un'altro; ed è quella appunto che ci rende visibili gli oggetti che denominiamo trasparenti.

Nel caso nostro però noi dobbiamo considerare la luce come interamente riflessa, ond'è che questo fenomeno conosciuto dai francesi sotto la denominazione di *Mirage* e dagl'italiani sotto quella di *Fata Morgana*, come si è detto precedentemente, ha ricevuto dai fisici l'appellativo affatto oggettivo e scientifico di " riflessione totale. "

§ 2.

È sotto questo aspetto che venne riconosciuto per la prima volta dal Monge, nella memorabile campagna d'Egitto del 1798.

" Il Basso Egitto, scrive l'illustre matematico, offre una vasta pianura quasi orizzontale, sparsa di collinette popolate qua e là di case e villaggi. Chi trovasi in riva al Nilo al sorgere del sole vede con grande chiarezza quelle alture coronate di boschi e palmizi e spinge il suo sguardo fino ai limiti del deserto. Man mano che il sole s'alza sull'orizzonte e che i suoi raggi vanno acquistando una forza più grande si manifesta un tremolio confuso intorno all'immagine degli oggetti, perchè il suolo riscaldato comunica il suo calore agli strati d'aria immediatamente sovrincombenti; la veduta si trasforma, la rifrazione si muta in riflessione, la superficie di separazione fra gli strati più densi e quelli immediatamente meno densi diventa lucida come uno specchio che prende apparenza di un gran lago ove si riflettono le case, gli alberi, il cielo azzurro " (1).

La spiegazione del fenomeno, data dal Monge, è fondata sulla nozione dell'*angolo limite*, che è il valore ultimo del-

(1) Jamin — *Mémoire sur la réflexion totale.* (1850). *Ann. de chim. et de phys.* XXX, 257. Inst. XVIII, 209.

l'angolo di refrazione allorchè i raggi si presentano paralleli alla superficie di separazione dei due mezzi di densità diversa: per l'acqua quest'angolo è di 48° 35′ relativamente alla densità dell'atmosfera.

Poichè il raggio dall'acqua all'aria retrocede per la via che ha percorso nell'entrarvi, si intende che un raggio che dall'acqua entri nell'aria, facendo colla normale un'angolo di 48° 35′, uscirà parallelamente alla superficie di separazione dei due mezzi. Se l'angolo che fa il raggio nell'acqua colla normale è maggiore di 48° 35′, è chiaro che il raggio non potrà più uscire: da ciò il nome di *angolo limite*. Accadrà in questo caso che la luce si rifletterà nell'interno del liquido; è questo il fenomeno della *riflessione totale*. Ed è perciò che si vedono riflessi alla superficie libera del liquido nei nostri acquarî i pesciolini e le piccole roccie o pianticelle che in essi si trovano.

Potremo con un recipiente di vetro di cui le due faccie siano convenientemente inclinate, chiudere l'orifizio di una finestra, e guardare il sole senza riceverne alcun raggio. Basterà per ciò che il raggio si presenti alla superficie di separazione facendo colla normale al punto d'incidenza un angolo maggiore dell'angolo limite.

Coi principi stessi della riflessione totale s'intende adunque il fenomeno del miraggio.

Allorchè due masse d'aria che hanno una diversa temperatura e densità stanno in alcune particolari circostanze di calma, di forte riscaldamento del terreno, separate e parallele, mentre la massa meno densa occupa gli strati inferiori, i raggi di luce che cadono inclinati e si presentano allo strato meno denso, facendo un'angolo molto piccolo colla superficie di separazione, possono soffrirvi la riflessione totale, e produrre per conseguenza delle immagini per riflessione. In realtà i due strati d'aria non possono essere separati da una superficie in cui avvenga improvvisamente il cambiamento di densità: lo strato d'aria che è princi-

palmente riscaldato presso il suolo forma una serie di strati che a partire da quel primo diminuiscono di densità man mano che si sale. Per questa disposizione i raggi che quasi verticalmente entrano dal mezzo più denso nella serie dei meno densi subiscono una deviazione che continua per ogni strato in modo da far loro percorrere una curva convessa verso il mezzo meno denso.

I raggi così ripiegati finiscono per tal maniera di presentarsi con un'angolo piccolissimo alla superficie di separazione dei due strati: ed ecco che accade lo loro riflessione totale. In questa guisa si riflettono rientrando nel mezzo più denso e descrivendo un'altra porzione di curva corrispondente alla prima. Ne avverrà di conseguenza che l'occhio il quale si troverà in posizione d'incontrare i raggi diretti e quelli che hanno percorso la linea curva suddetta, scorgerà due immagini, una diretta e l'altra che comparirà rovesciata, o a meglio dire simmetrica alla prima come in uno specchio piano.

E poichè è questa un'apparenza attribuita per le nostre abitudini alla presenza di una massa d'acqua che ci fa quest'effetto, è naturalissima l'illusione che l'esercito francese provava in Egitto sperando di avvicinarsi all'acqua. Quando l'aria meno densa è in alto e sovrapposta a strati molto più densi prossimi al suolo, come non di rado accade sul mare, si vedranno i vascelli navigare in aria per mezzo di immagini poste al di sopra di loro e rovesciate. Quando poi gli strati di densità diversa sono allo stesso livello e separati da piani verticali, avremo il caso del miraggio laterale veduto da Soret e Jurine sul lago di Ginevra; si comprende che in questo caso gli oggetti debbono parerci raddoppiati e le loro immagini conservarsi diritte. E se, finalmente, gli strati di densità variabile rimanendo perpendicolari all'orizzonte, la riflessione totale opportunamente si combina con uno dei frequenti casi di rifrazione straordinaria, si ottengono potenti ravvicinamenti come quello qui

accennato fin dal principio fra le più rilevanti modificazioni ed aspetti del fenomeno in discorso.

La riflessione totale nel caso citato è necessaria per spiegare l'apparizione dell'immagine in una direzione molto diversa da quella nella quale potrebbe esser veduto l'oggetto in realtà. Del resto, al ravvicinamento per sè, basta il fatto della semplice rifrazione come nel caso del bastone apparentemente spezzato dall'immersione e dei ciottoli veduti più vicini della realtà nel fondo di un pozzo o di una vasca.

Ma se è vero che molti fenomeni di rifrazione per le particolari condizioni in cui si presentano sono stati attribuiti a riflessione aerea, è pur vero che sovente si attribuisce alla prima ciò che è della seconda come può essere il caso dei frequenti miraggi laterali che offrono certe regioni dell'Alta Nubia secondo le descrizioni dei viaggiatori (1). Mentre le apparenze già notate circa il nascere e il tramontare del sole nelle regioni polari non sono estranee neppur esse al potere riflessivo dell'aria ancorchè in gran parte risultino da un insieme di rifrazioni.

Lo strato d'aria nell'orizzonte è tanto più grosso e più denso dello strato nella verticale, che la luce del sole è diminuita 1300 volte attraversando il primo: il che ci abilita a guardare il sole quando tramonta, senz'essere abbagliati. La perdita della luce e conseguentemente del calore per il potere assorbente dell'atmosfera cresce coll'obliquità dell'incidenza. Di 10000 raggi che cadono sulla superficie atmosferica, 8123 arrivano ad un dato punto della terra, se essi cadono perpendicolarmente; 7024 se l'angolo della direzione loro sia di 50°; 2831 se sia 7°, e solo cinque raggi arri-

(1) Ausland, 1875, n. 23, dal libro del conte A. di Prokesck *Osten, Nilfahrt bis zu den zweiten Kataraktén ein Führer duch Aegypten und Nubien,* Lipsia, 1874.

D. De Rivoir, *L'Abyssinie pittoresque et commerçante.* — *L'Exploration,* n. 1, 2 e 3 dec. 1876. *Études géographiques,* p. 1 a 20 e 17 a 20.

veranno attraverso uno strato orizzontale (1). Poichè una così grande quantità di luce si perde nel passare a traverso l'atmosfera, molti corpi celesti rimangono invisibili dalla pianura, mentre possono essere veduti da situazioni elevate.

Il diminuito splendore e la falsa stima che noi facciamo della distanza dal numero degli oggetti interposti, ci conducono a supporre il sole e la luna essere più grandi quando sono nell'orizzonte, che ad alcun'altra altezza, sebbene l'apparente loro diametro è allora di qualche grado minore. In luogo di improvvise transizioni di luce e di tenebre, il potere riflessivo dell'aria adorna la natura colle tinte rosee e dorate dell'aurora e del crepuscolo. Anche quando il sole è 18° sotto l'orizzonte, una porzione sufficiente di luce rimane a mostrare che all'altezza di 30 miglia vi è ancora densità bastante per riflettere la luce. L'atmosfera disperde i raggi del sole, e somministra tutte le belle e graziose tinte del giorno. Essa trasmette la luce azzurra in grandissima copia: più alto ascendiamo, più il cielo prende un turchino cupo, ma nell'estensione immensa dello spazio il sole e le stelle devono comparire come macchie brillanti in “ campo „ nero.

§ 3.

Ma ritornando alla parte sostanziale del fenomeno in discorso, a compiere questa trattazione sintetica e descrittiva, non sarà fuori di luogo l'accennare ad alcune esperienze dalle quali risulta l'apparenza dovuta alla riflessione aerea.

Wollaston ci ha insegnato uno sperimento semplice, mediante cui ottiensi lo stesso effetto che nel caso più complesso di *Fata Morgana* con doppia immagine diritta e una rovesciata, quale è l'apparenza descritta più specialmente dai viaggiatori delle regioni polari. A tal uopo prendasi un vaso di cristallo a base quadrilatera e con pareti ben le-

(1) Somerville, *Della Conness. delle Sc. Fis.*, Ediz. cit., pag. 195-96.

vigate; si versi in esso dell'acqua e si faccia passare attraverso a questa il cannello stretto di un imbuto, che giunga sino al fondo; versando in questo dell'acido solforico concentrato e procedendo cautamente in siffatta operazione potremo far variare a nostro bell'agio la densità del liquido da strato a strato: ond'è che esponendo dietro al vaso un piccolo oggetto, p. e., delle lettere scritte su di una carta, e situando l'occhio nella direzione dell'orizzontale stessa, si vedrà, in posizione opportuna, l'oggetto doppio con un'immagine diretta e l'altra riflessa (1).

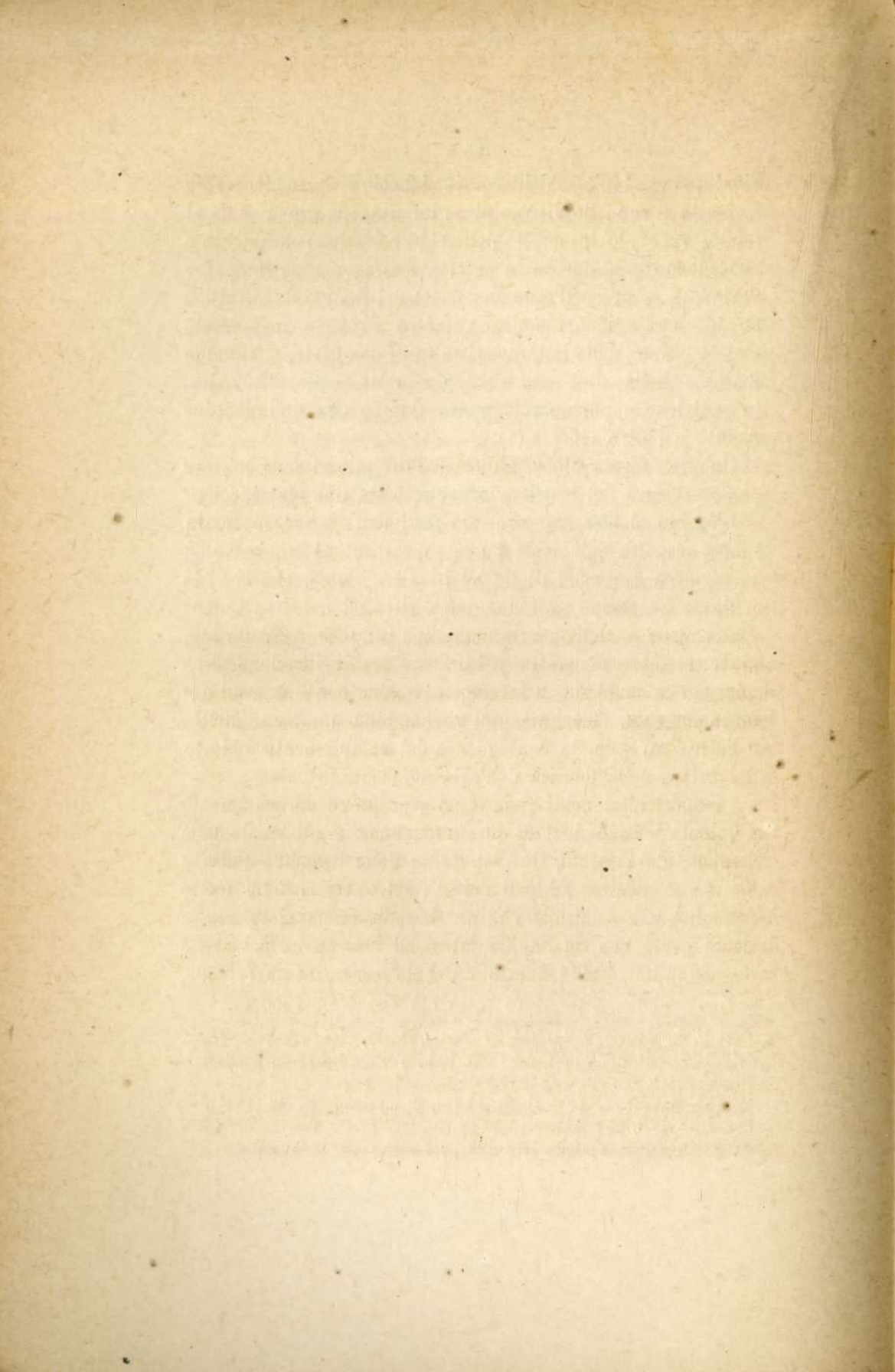
Un'altra forma più semplice di miraggio si può imitare coll'esperienza del braciere ardente, fatta dal Matteucci.

L'occhio dell'osservatore può facilmente esser messo in modo, rispetto agli strati d'aria soprastanti al braciere e ad un oggetto fissato al di là del braciere stesso, che si veda nello stesso tempo un'immagine diritta ed un'altra immagine rovesciata dell'oggetto medesimo (2). Il dott. Wollaston, già citato, ottenne parimenti il fenomeno di riflessione aerea guardando lungo un attizzafuoco riscaldato a rosso, un oggetto distante. Due immagini vi si vedono pure, una diritta e l'altra rovescia, in conseguenza del cambiamento indotto dal calore nella densità dell'aria adiacente (3).

In molti altri modi si possono riprodurre artificialmente a volontà le condizioni di questo fenomeno tradizionale delle steppe e del deserto, il *Kimmering* delle leggende teutone e il *serab* degli arabi, di cui dice il Corano: " Le opere degli infedeli somigliano al *serab* nelle pianure; l'assetato tienlo per acqua, ma appressatosi ad esso trova poi che è un nonnulla. „ Onde questo vocabolo serve, come si vede, per estensione, a dinotare tutto ciò che è ingannevole.

(1) F. L. Kamtz, *Relazioni di Meteorologia*, Sez. VII, § 14. (Ediz. della Soc. edit. della bibl. dei Com. Ital., Torino, 1853 — pag. 354). Somerville, op. cit., pag. 581.

(2) C. Matteucci, *Lezioni di Fisica*, 2ª edizione di Pisa (1844). — Lez. LXXXVII, pag. 422.

(3) Somerville, op. cit., pag. 193.

Parte Analitica.

§ I.

Chi volesse investigare la natura e il concetto della esplicazione analitica di questo ordine di fenomeni fisici troverebbe che la matematica astratta vi è pure stata associata, come nella parte maggiore dei fenomeni della natura, indirettamente col sussidio di altre scienze meno generali come la geometria e la meccanica. Il Comte, che più di ogni altro fra i moderni ha considerato queste interessanti relazioni fra il mondo fisico e il mondo matematico e che con una chiarezza maravigliosa ha saputo nei due primi volumi della sua grande opera delinearne i rispettivi confini, non ammetteva a' suoi tempi che un solo caso di applicazione diretta, quello che risulta dai lavori di Fourier sulla termologia (1), dai quali, secondo lui, quello scienziato avrebbe

(1) A. Comte, *Cours de Philosophie positive,* T. I, p. 113; p. 349. — T. II, Leç. 29 e segg. (V. il paragrafo: Considerazioni sull'insieme della fisica). Il Comte considera come non ancora filosoficamente istituita l'applicazione della matematica allo studio della fisica.

Ritiene come *concrete* la geometria e la meccanica di fronte alla matematica astratta. " Quantunque la semplicità dei loro fenomeni faccia spesso misconoscere il *carattere sperimentale dei loro principî.* "

in certo modo ricavato elementi analitici nuovi nella scoperta diretta di una legge numerica fondamentale, che è la base di una teoria matematica.

È adunque per mezzo di una opportuna riduzione delle leggi di questi fenomeni a leggi geometriche e meccaniche che vi si è potuto applicare la matematica astratta: onde si ottiene il grande vantaggio di impartire alle questioni fisiche un carattere di generalità e di razionalità che dà valore di scienza positiva all'induzione fondamentale, e riveste un alto valore filosofico.

Della necessità di ricorrere alla geometria e alla meccanica come intermediarî per l'applicazione dello spirito matematico ai fenomeni, e del vantaggio che da quest'applicazione consegue circa alla maggiore generalità e rigore scientifico delle dimostrazioni — abbiamo appunto un esempio nella teorica della riflessione totale presa nel suo complesso, e considerata come caso particolare della refrazione.

Si sa che un rapporto costante esiste per gli stessi corpi fra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di refrazione, qualunque sia l'incidenza. È questo rapporto $n = \frac{sen\, i}{ren\, r}$ che chiamasi *indice di refrazione.*

Si sa ancora che il raggio incidente ed il rifratto sono nello stesso piano e che, se il raggio rifratto retrocedesse dal mezzo più denso al meno denso, percorrerebbe esattamente la stessa strada che ha seguìta nell'entrare.

L'indice di refrazione è parimente noto che varia al variare delle sostanze. Se un raggio entra dall'aria nell'acqua, il rapporto o indice è $\frac{4}{3}$. Questa frazione significa che sotto qualunque incidenza il seno dell'angolo d'incontro sta al seno dell'angolo di refrazione come 4 : 3. Se è 4 il seno del primo angolo e 3 il seno dell'altro: raddoppiando, triplicando il primo, anche il secondo si raddoppia o si triplica.

L'indice di refrazione pel *crown-glas* è 1,535; pel *flint-*

glass 1,6; pel diamante 2,487, e pel cromato di piombo 3, la quale sostanza ha il potere rifrattivo più alto che alcun'altra conosciuta.

Descartes, che è lo scopritore di questa legge ottica, vi giunse adoperando un vaso di vetro composto di due dischi simili con una lamina alla periferia, e pieno d'acqua. Questo vaso va empito alla metà di acqua. Uno dei dischi è graduato, e porta sull'orlo un'appendice munita di un orifizio per cui si fa entrare il raggio in modo che vada a cadere sul centro del disco. Il raggio si rifrange entrando nell'acqua, e si legge sul circolo graduato l'angolo che fa il raggio refratto colla normale al punto d'incidenza.

Dalla formola di Descartes si deduce ciò che deve avvenire quando il raggio cade normalmente sul secondo mezzo. Il seno di un angolo zero è zero e quindi anche $sen\ r$ e r sono quantità eguali a zero in questo caso. In altri termini, il raggio che cade normalmente non è deviato: in questo caso non vi ha refrazione. Se invece l'angolo d'incidenza è il massimo, ossia uguale a 90°, nel qual caso si ha incidenza radente, essendo $sen\ 90° = 1$,

si ha

$$\frac{1}{sen\ r} = n$$

da cui può dedursi

$$sen\ r = \frac{1}{n}$$

r è appunto l'*angolo limite* che abbiam visto essere per l'acqua di 48° 35′ 25″ e che sappiamo essere per il vetro 41 48′° 37″ (1).

Per ogni valore più grande di r si ha la *riflessione totale* e quindi, come si disse, la visione viva degli oggetti come

(1) Desprez, op. cit., pag. 382.

se fossero veduti direttamente, perchè nessuna parte della luce incidente sfugge alla riflessione oltre alla superficie di separazione dei due mezzi.

Quando la luce cade sopra una lastra di *crown-glass* con un angolo di 4° 32′ alla sua superficie, il cristallo riflette quattro volte più luce che non ne trasmetta. Ad un angolo di 7° 1′ la luce riflessa è doppia di quella trasmessa, ad un angolo di 11° 8′ la luce riflessa è uguale a quella trasmessa; a 17° 17′ la riflessa è uguale alla metà della trasmessa; a 26° 38′ è uguale a un quarto; la variazione essendo, secondo Arago, come il quadrato del coseno (1).

§ 2.

Sarebbero a considerarsi, per ciò che riguarda l'intensità relativa del moto incidente e del moto riflesso come pure per ciò che spetta alla fase di vibrazione dei due moti nel punto d'incidenza, i varî casi di luce incidente polarizzata, ampiamente svolti da Fresnel tanto per la rifrazione come per la riflessione, e compresi in un sistema di espressioni analitiche di somma importanza. Noi ci restringeremo ad un caso solo.

Quando l'angolo d'incidenza diviene superiore al valore per il quale si ha $r = 90°$, trovasi per $sen\ r$ un valore superiore all'unità: questo angolo diventa immaginario, e le formule che danno le ampiezze e le intensità della luce rifratta e riflessa sono inapplicabili.

Poniamo che la luce incidente sia polarizzata nel piano d'incidenza. Si ha dall'esperienza che se l'angolo i sorpassa

(1) Arago, *Sur l'emploi des piles de glaces pour l'étude des lois de la polarisation. Ouvres complétes,* X, 529.
Verdet, *Leç. d'Optique Phisique,* T. II, p. 456.

il valore per il quale $r = 90°$, non vi ha più raggio rifratto, e il raggio riflesso è uguale in intensità al raggio incidente e com'esso polarizzato nel piano d'incidenza.

Questo risultato dell'esperienza è confermato dalla teoria. Il " principio di Huyghens „ mostra che nel secondo mezzo i movimenti vibratorî si distruggono a partire da una brevissima distanza dalla superficie di separazione.

Il " principio delle forze vive „ esige che il raggio riflesso sia uguale in intensità al raggio incidente, posciachè non vi ha più raggio rifratto; ed è una semplice ragione di simmetria che ci fa comprendere *a priori* il raggio riflesso dover essere polarizzato anch'esso nel piano d'incidenza. Sia v la velocità massima di vibrazione del raggio riflesso nel caso predetto, si sa dalla teoria di Fresnel che:

$$v = -\frac{sen^2\,(i - r)}{sen^2\,(i + r)}$$

e che quanto alla sua intensità, se la si designa con I, quella del raggio incidente essendo presa per l'unità,

$$I = \frac{sen^2\,(i - r)}{sen^2\,(i + r)} \quad (1)$$

È manifesto che il segno della v è uguale o contrario al segno della velocità di vibrazione del raggio incidente secondochè il nuovo mezzo è più o meno rifrangente del primo.

Cerchiamo in qual modo varia v quando il secondo mezzo è meno rifrangente del primo, cioè $i > r$.

Per $i = o$, $v = \frac{o}{o}$ che è una forma indeterminata. Ma allorchè i tende a zero, i seni degli angoli $i - r$, $i + r$,

(1) VERDET, op. cit., T. II, p. 404.

tendono verso gli archi $i - r$, $i + r$, onde si ha nel caso nostro:

$$v = - \lim \frac{i - r}{i + r} = - \lim \frac{\frac{i}{r} - 1}{\frac{i}{r} + 1}$$

$$v = - \frac{n - 1}{n + 1}$$

essendo $\frac{i}{r} = n$, indice di rifrazione.

Vediamo che il numeratore di detta formola cresce col crescere dell'angolo di incidenza, ed il denominatore cresce per decrescere in seguito. A conoscere come varî v basterà farne la derivata

$$- \frac{\cos(i - r)\left(1 - \frac{dr}{dr}\right) sen(i + r) - \cos(i + r)\left(1 + \frac{dr}{di}\right) sen(i - r)}{sen^2(i + r)}$$

e siccome

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n . \cos r}$$

(trovata, come si sa, differenziando $sen\, i = n\, sen\, ri$) così la derivata di v, sostituendo questo valore di $\frac{dr}{di}$ diverrà,

$$\frac{- \cos(i - r)\left(1 - \frac{\cos i}{n \cos r}\right) sen(i + r) - \cos(i + r)\left(1 + \frac{\cos i}{n \cos r}\right) sen(i - r)}{sen^2(i + r)}$$

onde quel numeratore sviluppato sarà:

$$- \cos(i - r)\, sen(i - r) + \cos(i - r)\, sen(i + r) \frac{\cos i}{n \cos r}$$

$$+ \cos(i + r)\, sen(i - r) + \cos(i + r)\, sen(i + r) \frac{\cos i}{n \cos r}$$

e l'intera espressione potrà ridursi evidentemente a

$$\frac{-\,sen\,2r + \dfrac{cos\,i}{n\,cos\,r}\,sen\,2\,i}{sen^2\,(i + r)}$$

Ma

$$n = \frac{sen\,i}{sen\,r}$$

Sostituisco

$$\frac{-\,sen\,2\,r\,.\,sen\,i\,.\,cos\,r + cos\,i\,sen\,r\,.\,sen\,2\,i}{sen\,i\,cos\,r\,sen^2\,(i + r)}$$

da cui ottengo, dividendo sopra e sotto per *sen r*,

$$\frac{2\,sen\,i\,(cos^2\,i - cos^2\,r)}{\dfrac{sen\,i}{sen\,r}\,cos\,r\,sen^2\,(i + r)}$$

$$\frac{2\,sen\,i\,(cos^2\,i - cos^2\,r)}{n\,cos\,r\,.\,sen^2\,(i + r)}$$

Siccome questa espressione è negativa, e v diminuisce quando i aumenta, il suo valore assoluto aumenta coll'incidenza. Onde si conclude che, se la luce è polarizzata nel piano d'incidenza, l'intensità del raggio riflesso aumenta coll'incidenza.

Quando poi il secondo mezzo è meno refrangente del primo si applica la stessa formola cambiando soltanto il segno di v, che in questo caso è positivo.

Giunti a questo punto è necessario riconoscere che l'indice n, essendo nel caso nostro più piccolo dell'unità, arriva un momento in cui $sen\ i = n$ e quindi $sen\ r = 1$.

Sorpassato questo limite $sen\ r > 1$ ed r rimane immaginario, come già si è detto in principio. Quindi v è pure immaginaria, e l'espressione datane precedentemente — in questo caso, che è appunto quello della riflessione totale — merita una speciale interpretazione.

Riprendo la

$$v = -\frac{sen\ (i - r)}{sen\ (i + r)}$$

e ricordando che $sen\ r = n\ sen\ i$, avrò:

$$v = \frac{sen\ i \sqrt{1 - n^2\ sen\ ^2 i} - n\ sen\ i\ .\ cos\ i}{sen\ i \sqrt{1 - n^2\ sen\ ^2 i} + n\ sen\ i\ .\ cos\ i}$$

Siccome per noi $n\ sen\ i > 1$, così le quantità collocate sotto radice sono negative e l'espressione di v, immaginaria.

Posso scrivere:

$$v = \frac{n\ sen\ i\ cos\ i - sen\ i \sqrt{n^2\ sen\ ^2 i - 1} \sqrt{-1}}{n\ sen\ i\ cos\ i + sen\ i \sqrt{n^2\ sen\ ^2 i - 1} \sqrt{-1}} \qquad (\alpha)$$

e in generale:

$$v = a + b \sqrt{-1} \qquad (\beta)$$

Soluzione che si può interpretare nel modo seguente: le quantità a e b si rappresentino come lunghezze collocate a partire da un punto O lungo due assi ortogonali. La retta congiungente le estremità libere delle due rette (ipotenusa del triangolo rettangolo di cui le due rette sono i due cateti) sarà rappresentata da $a b + \sqrt{-1}$, poichè il quadrato di quest' espressione è uguale a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Riduco effettivamente la (α) alla forma generale degli immaginarî (β).

Faccio sparire il radicale al denominatore

$$v = \frac{n^2\ sen\ ^2 i\ cos\ ^2 i - n^2\ sen\ ^4 i + sen\ ^2 i - 2\ n\ sen\ ^2 i\ cos\ i \sqrt{n^2\ sen\ ^2 i - 1} \sqrt{-1}}{n^2\ sen\ ^2 i\ cos\ ^2 i + sen\ ^2 i\ (n^2\ sen\ ^2 i - 1)}$$

$$v = \frac{n^2 + 1 - 2\ n^2\ sen\ ^2 i - 2\ n\ cos\ i \sqrt{n^2\ sen\ ^2 i - 1} \sqrt{-1}}{n^2 - 1}$$

ottengo:

$$v = \frac{n^2 + 1 - 2\, n^2 \operatorname{sen}^2 i}{n^2 - 1} - \frac{2\, n \cos i \sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 i - 1}}{n^2 - 1} \sqrt{-1}$$

che ha la forma voluta.

§ 3.

Fresnel ha osservato che il moto vibratorio incidente essendo rappresentato da $\operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$, il riflesso lo sarà da

$$A \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} + B \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

ove A e B sono due costanti. La v del raggio riflesso è uguale a $\sqrt{A^2 + B^2}$. Ma le formule generali ci conducono per l'espressione di questa v ad una soluzione della forma $a + b\sqrt{-1}$. Interpreteremo questa soluzione facendo

$$a = A \quad b = B.$$

Pertanto quest'ultima espressione del moto vibratorio riflesso la scriveremo così:

$$\sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{t}{T} + arc.\ tang.\ \frac{B}{A}\right)$$

ove arc. tang. $\frac{B}{A}$ è la differenza di fase fra il raggio riflesso e il raggio incidente al punto d'incidenza.

Da quanto si è detto precedentemente risulta parimenti che per avere l'intensità del raggio riflesso basta ad

$$a + b\sqrt{-1}$$

sostituire

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

onde

$$I = \frac{(n^2 + 1 - 2\,n^2\,sen\,^2 i)^2 + 4\,n^2 \cos{}^2 i\,(n^2\,sen\,^2 i - 1)}{(n^2 - 1)^2}$$

da cui

$$I = \frac{(n^2 + 1)^2 + 4\,n^4\,sen\,^2 i - 4\,n^2\,(n^2 + 1)\,sen\,^2 i - 4\,n^2 \cos{}^2 i}{(n^2 + 1)^2}$$

$$I = \frac{(n^2 + 1)^2 - 4\,n^2}{(n^2 - 1)^2} = 1$$

Onde l'intensità del raggio riflesso è uguale a quella del raggio incidente, come in ogni modo è provato dall' esperienza.

Per ciò che riguarda la differenza di fase fra il moto incidente e il moto riflesso, avremo, rappresentando il moto vibratorio del raggio riflesso con $sen\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varphi}{\lambda}\right)$, che essa dovrà considerarsi uguale a $2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$.

Ed ecco che arc. tang. $\frac{B}{A} = 2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$

onde

$$\frac{B}{A} = tang\;2\pi\frac{\varphi}{\lambda}$$

per cui si ha

$$tang\;2\pi\frac{\varphi}{\lambda} = -\frac{2\,n\cos i\sqrt{n^2\,sen\,^2 i - 1}}{1 + n^2 - 2\,n^2\,sen\,^2 i}$$

sempre ammesso che il raggio incidente sia polarizzato nel piano d'incidenza.

Quando il moto incidente è invece polarizzato perpendicolarmente al piano d'incidenza si prende una via analoga

per la ricerca del valore di v', partendo dalla forma

$$v' = \frac{sen\, i \cos i - n\, sen\, i \sqrt{n^2 sen^2 i - 1}\sqrt{-1}}{sen\, i \cos i + n\, sen\, i \sqrt{n^2 sen^2 i - 1}\sqrt{-1}}$$

e ricavando parimenti

$$v = \frac{1 + n^2 - (n^4 + 1)\, sen^2 i}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\, sen^2 i - 1]} - \frac{2n \cos i \sqrt{n^2 sen^2 i - 1}\sqrt{-1}}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\, sen^2 i - 1]}\sqrt{-1}$$

$$A = \frac{1 + n^2 - (n^4 + 1)\, sen^2 i}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\, sen^2 i - 1]}$$

$$B = \frac{2n \cos i \sqrt{n^2 sen^2 i - 1}}{(n^2 - 1)[(n^2 + 1)\, sen^2 i - 1]}$$

$A^2 + B^2$ esprimerà nuovamente l' intensità della luce riflessa, onde sostituiti i due valori precedenti e, fatte le riduzioni, avremo per quest'ultima un valore uguale all'unità.

Avremo pure

$$tang\, 2\pi \frac{\varphi'}{\lambda} = \frac{B}{A} = -\frac{2n \cos i \sqrt{n^2 sen^2 i - 1}}{1 + n^2 - (n^4 + 1)\, sen^2 i}$$

per la differenza di fase nel caso, come si è detto, che la luce sia polarizzata perpendicolarmente al piano d' incidenza.

Tale è in alcuni suoi tratti la teoria analitica di Fresnel per il caso della " riflessione totale „ non solo in ciò che riguarda l'intensità della luce riflessa, ma ancora per ciò che spetta alla differenza di fase fra il moto incidente e il moto riflesso nel punto di incidenza; poichè, secondo il principio

di Huyghens, anche nel caso nostro, il moto rifratto non cessa alla superficie di separazione dei due mezzi, ma ad una piccola distanza da essa.

È sopratutto su questa condizione del moto vibratorio nel caso nostro che giova insistere, poichè nel caso della riflessione ordinaria accade precisamente il contrario: le intensità del raggio incidente e riflesso non sono uguali, e le fasi sono le stesse.

A provare questa particolare e caratteristica condizione della riflessione totale altri casi di moto incidente potrebbero essere trattati in modo analogo, ma da quanto si è detto rimarrà forse bastantemente delineata la natura del procedimento.

INDICE

Proemio: La vita e le opere scientifiche di Marcantonio De Dominis — pagine XXXI.

I. Considerazioni generali sui tempi e sulla vita di Marcantonio De Dominis . . . . *Pag.* VII
II. Primo periodo teologico della sua vita . . . . . „ X
III. Periodo scientifico . . . . „ XIV
IV. Secondo periodo teologico . . . . „ XXI
V. Morte e condanna . . . . „ XXVI

L'Arcobaleno, pagine 42.

Descrizione sintetica (Teoria di De Dominis)
§ 1. . . . . „ 3
§ 2. . . . . „ 7

Descrizione analitica (Teorie di Cartesio e di Newton)
§ 1. . . . . „ 11
§ 2. . . . . „ 18

Descrizione complementare (Teorie di Yonng e di Airy)
§ 1. . . . . „ 29
§ 2. . . . . „ 36

Il Miraggio, pagine 43-68.

Parte descrittiva
§ 1. . . . . „ 45
§ 2. . . . . „ 50
§ 3. . . . . „ 54

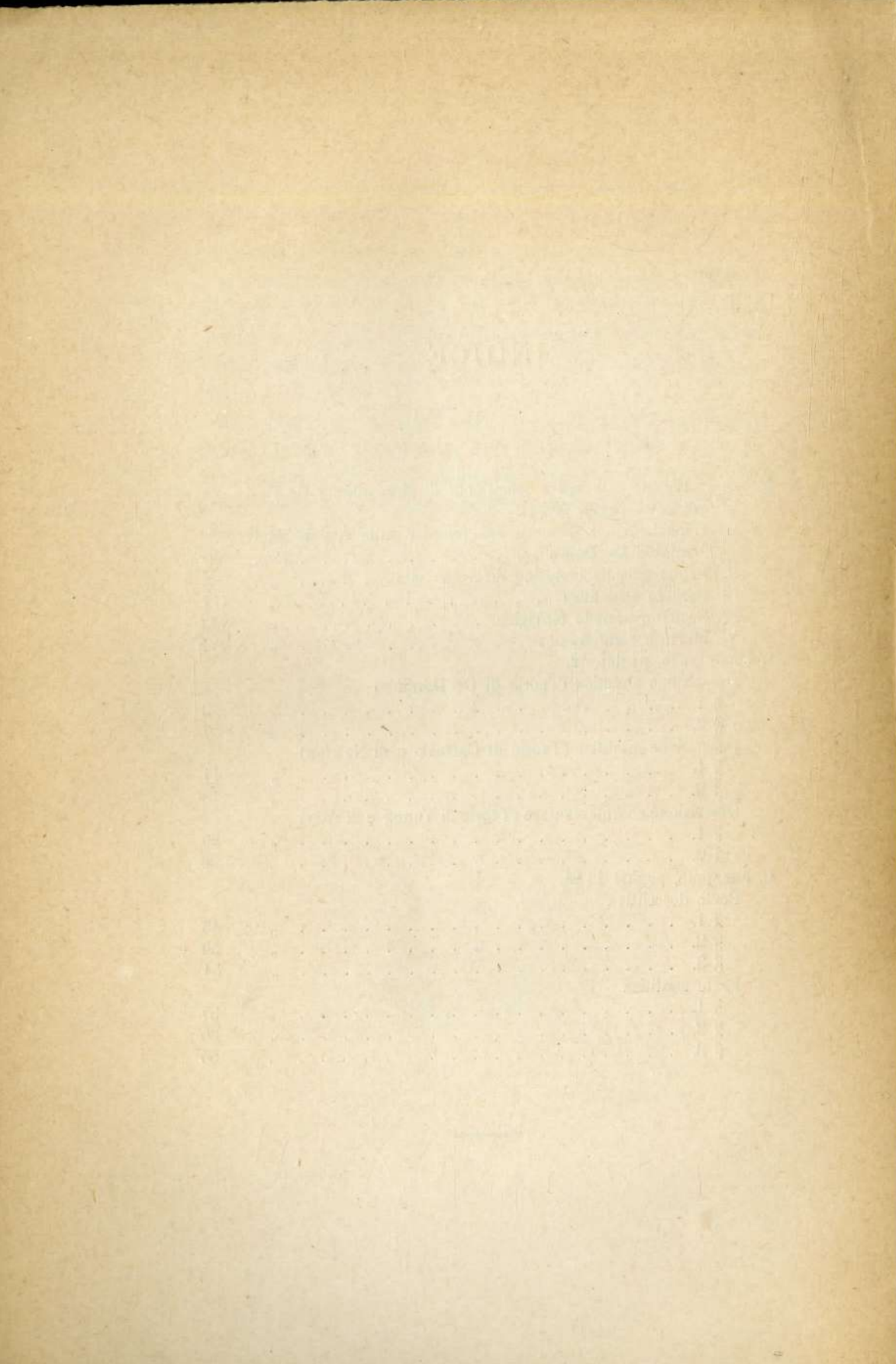
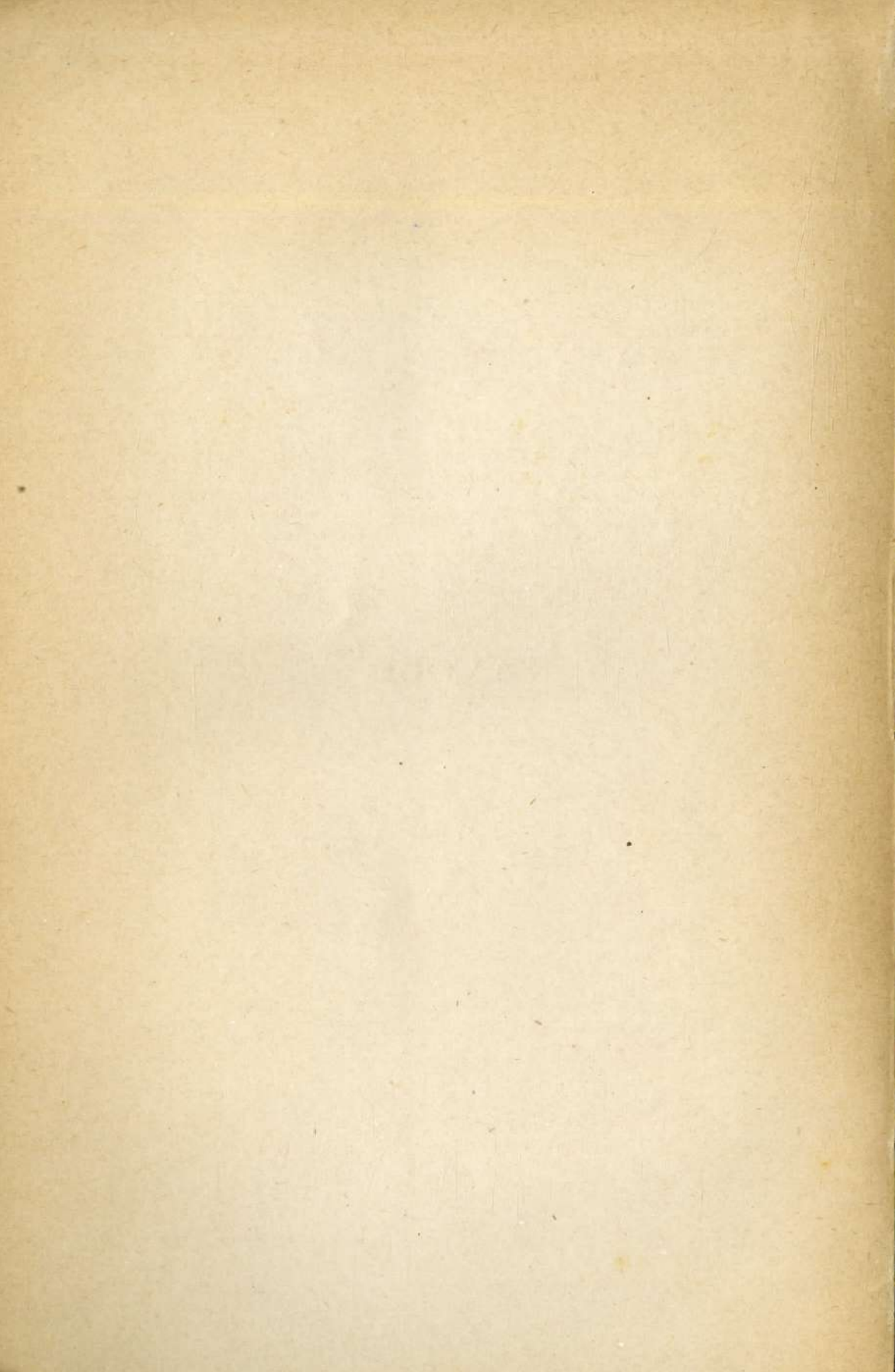
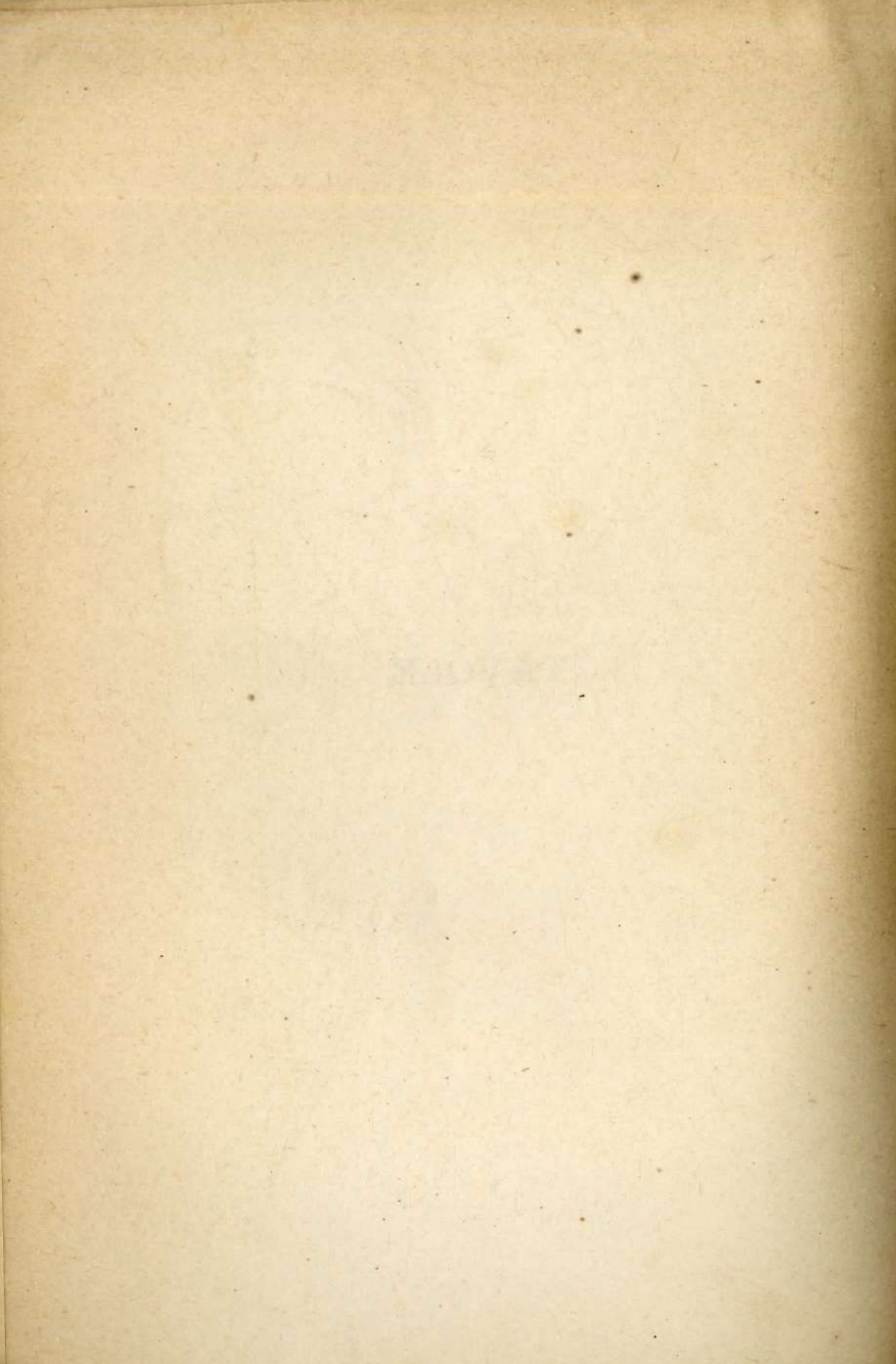
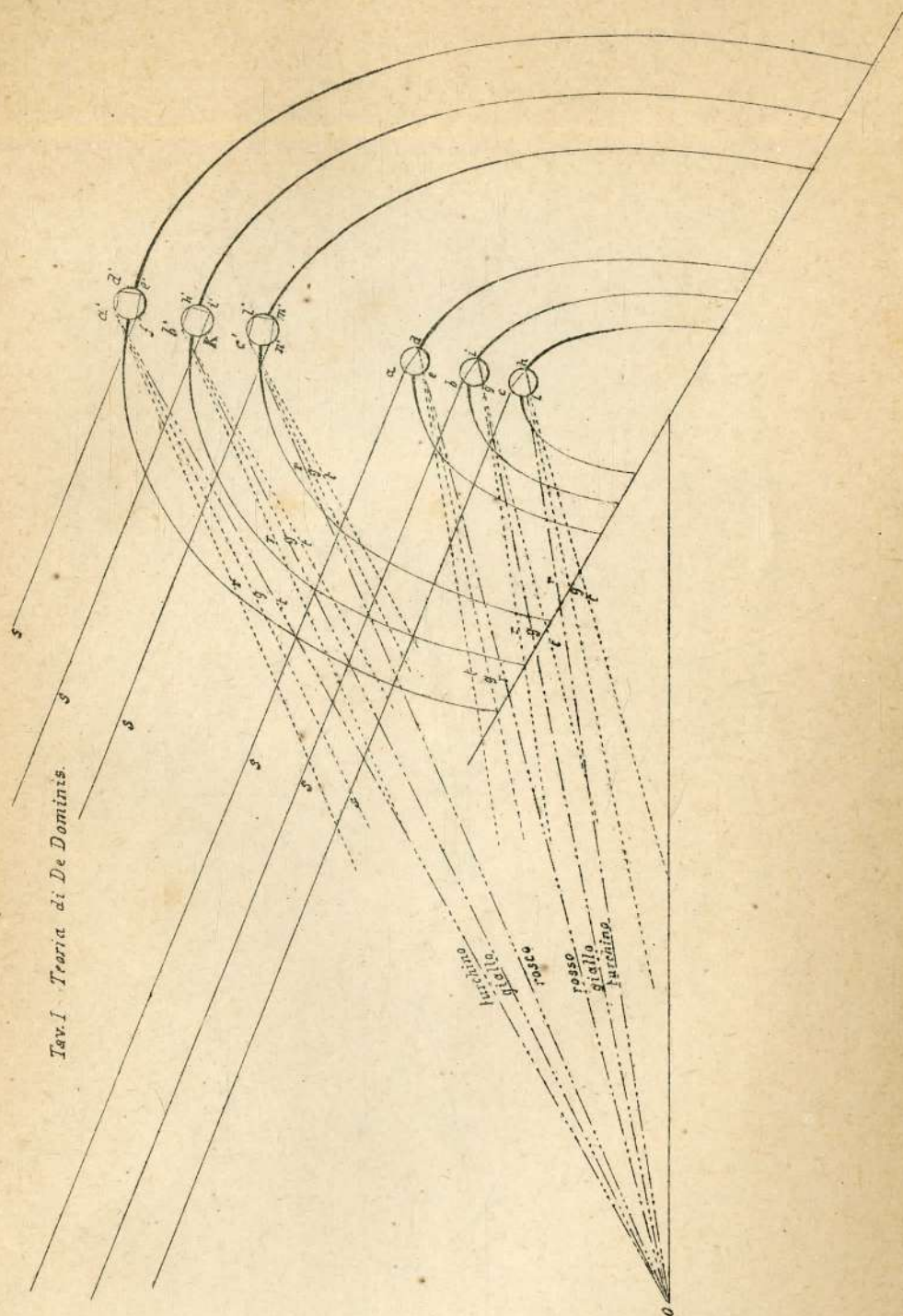
Parte analitica
§ 1. . . . . „ 57
§ 2. . . . . „ 60
§ 3. . . . . „ 65

TAVOLE

Tav. I Teoria di De Dominis.

Tav. II. Teoria di Cartesio

fig. 1

S
I
I'
C
I''
V
R

fig. 2.

S
S
S
I''
I'
I'
b
d
p
o

fig. 3.

S
I
m
p
I'
q
D
n
o
I''

Tav. III. Teoria di Cartesio.

Tav. IV.
Teoria di Newton
fig. 1
S
S
I
A
E
o
H
I'
D
A'
H
I''
R
H'
fig. 2
R'
L'
S
L
E'
S
A'
E
o
L'
D
S
L
A'
I'
ω
I''
D'
R

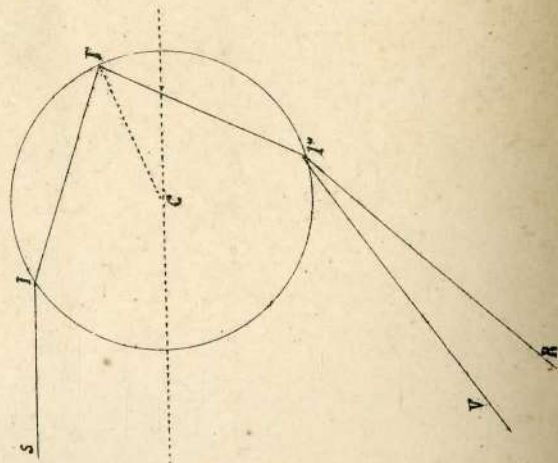
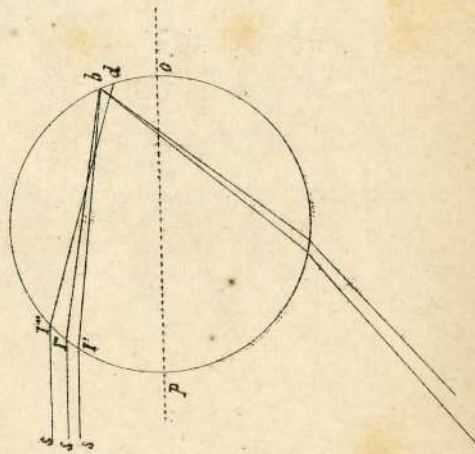
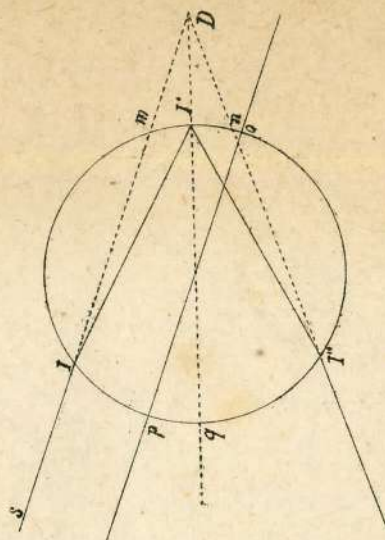
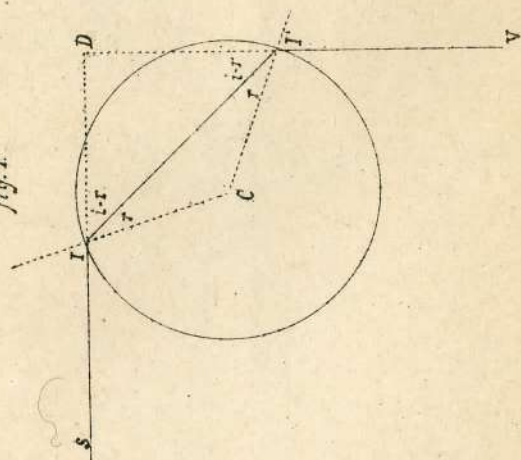
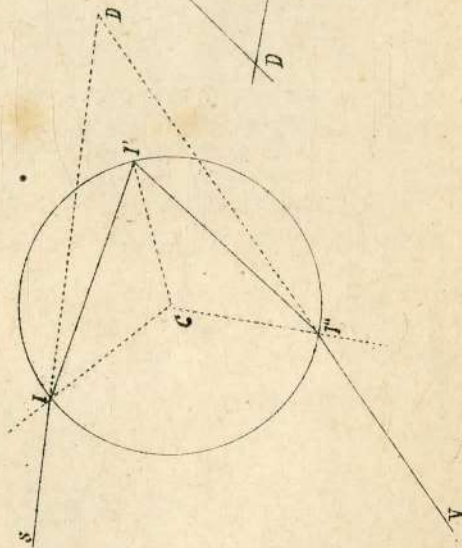
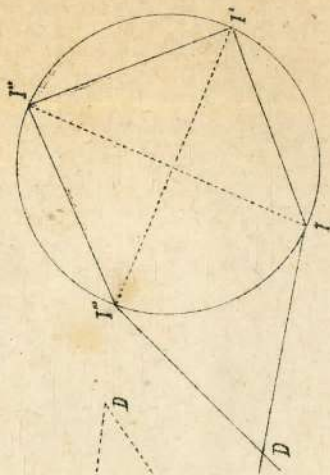
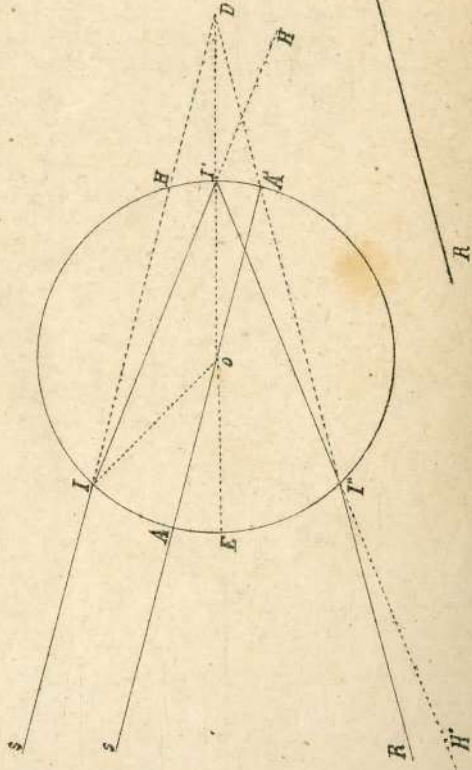
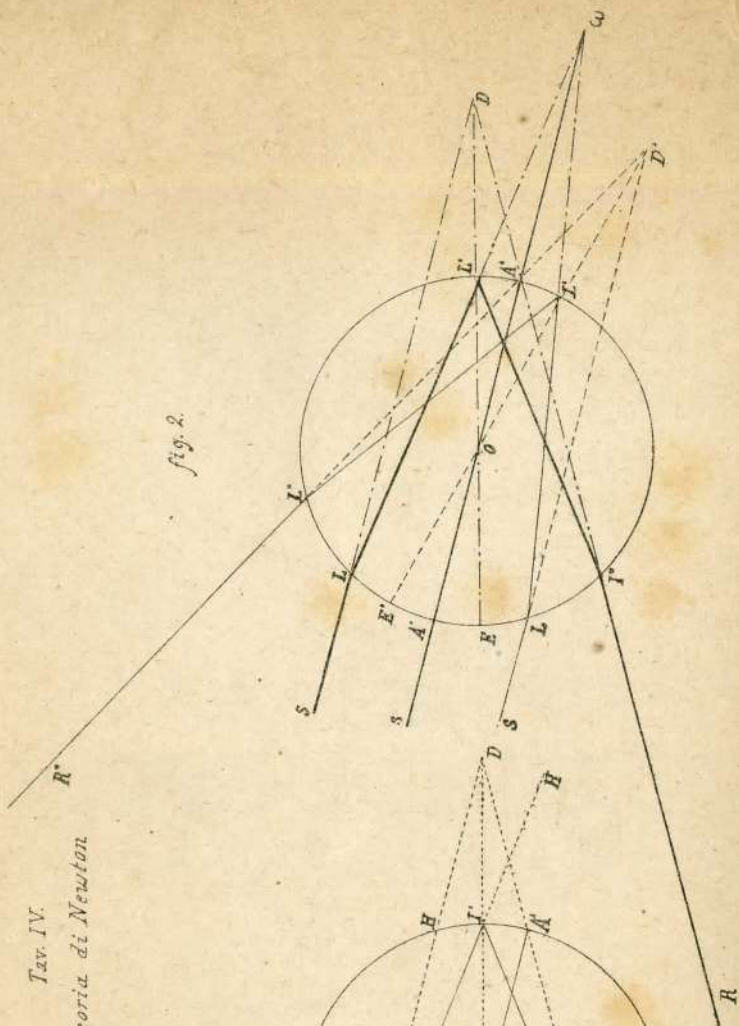



fig. 1
Teoria di Young
fig. 2
Teoria di Airy
fig. 3